Um welche Flächen geht es beim Sehnensatz?

Entdeckendes Lernen in der Lehramtsausbildung

von

Emese Vargyas, Ysette Weiss-Pidstrygach

Kurzfassung: Die Ähnlichkeitssätze am Kreis erlauben ein tieferes Verständnis geometrischer Zusammenhänge, angefangen von rechtwinkligen Dreiecken bis hin zu kinematisch erzeugten Kurven. Die Sätze über den Umfangswinkel und über sich schneidende Sehnen an Kreisbögen sind nicht unmittelbar von der Betrachtung der entsprechenden Konfiguration ersichtlich, gestatten gleichwohl durch Experimentieren das Erkennen von Struktur und geometrischen Mustern. Wir zeigen an einigen Beispielen, wie eigenständiges Untersuchen dieser mathematischen Zusammenhänge im Kontext kanonischer Themen des mathematikdidaktischen Studiums, wie Begriffsentwicklung, Problemlösen und Beweisen, angeregt werden kann. Ergänzend zu diesen Themen skizzieren wir am Beispiel des Sehnensatzes einige fachdidaktische Sichtweisen zur Verwendung historischer Quellen in Bezug auf Unterrichtsentwicklung.

Abstract: Theorems about inscribed angles in circles and intersecting chords allow a deeper understanding of various geometric constellations from right angled triangles to kinematically generated curves. The similarity theorems in a circle are not immediately apparent from the consideration of the respective configuration. However, by experimentation they reveal deeper structure and beauty. We show how this content allows and inspires learning by discovery in teacher education. Our examples are related to canonical themes in the study of mathematics education, such as concept development, problem solving and the educational aspects of proving. In addition to these topics, we use the example to give an introduction into the development of learning environments involving the use of historical sources as a tool.

1 Einleitung

Schaut man in die Kerncurricula verschiedener Bundesländer, kann man sich des Eindrucks nicht erwehren, dass die Autoren in rechtwinkligen Welten zu leben scheinen. Da Mathematik außer Anwendungen auch Ideenwelten beschreibt, legt dies auch rechtwinklige Urheber – sogenannte Quadratköpfe nahe. Würde nun irgendwann Besuch aus Krumm- und Schiefland kommen, wüsste man vielleicht gar nichts mehr mit ihm anzufangen, sogar Fremdenfeindlichkeit wäre – wie die

Erfahrung der *Flatlander* (Abott 2006) lehrt – nicht auszuschließen. Aus Gründen der Weltoffenheit und Völkerverständigung plädieren wir deshalb dafür, nicht rechtwinklige doch desto trotz schöne und tiefe Muster und Strukturen nicht ganz aus dem Blickwinkel zu verlieren und den Lehrern und Lehrerinnen der nächsten Generation ihre Existenz nicht ganz zu verheimlichen oder sie gar der Vergessenheit anheimfallen zu lassen.

Die Ähnlichkeitssätze am Kreis drücken den geometrischen Zusammenhang der Streckenabschnitte zweier sich und einen Kreis schneidender Geraden aus. Unter Verwendung des Umfangswinkelsatzes und der Ähnlichkeit von Dreiecken können diese Sätze und eine ganze Reihe anderer schöner geometrischer Zusammenhänge bewiesen werden. Den Vorgaben der Kerncurricula entsprechend findet man in vielen Mathematiklehrbüchern die Ähnlichkeitssätze, den Satz vom Umfangswinkel und die Satzgruppe des Pythagoras auf den Spezialfall *Satz des Thales* und die *Satzgruppe des Pythagoras* reduziert. Ergänzende geometrisch formulierte Sachverhalte dienen vorrangig der Vorbereitung trigonometrischer Funktionen und der Algebraisierung durch die Methoden der analytischen Geometrie und weniger der Entwicklung der für die Lösung elementargeometrischer Aufgaben notwendigen, geometrischen Intuition. Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich mit vielfältigen Möglichkeiten der Einbeziehung der Ähnlichkeitssätze am Kreis in die mathematikdidaktische Bildung zukünftiger Mathematiklehrer.

Zuerst schauen wir uns kurz die derzeitigen Darstellungen und Einbettungen der Ähnlichkeitssätze in einigen Mathematiklehrbüchern an und diskutieren die damit verbundenen Möglichkeiten der Entwicklung mathematischen Denkens und mathematischer Fertigkeiten. Die Autorinnen sind davon überzeugt, dass die Eliminierung der Ähnlichkeitssätze am Kreis aus der Schulmathematik zu einer bedeutenden Einschränkung formulierbarer und erfolgreich bearbeitbarer geometrischer Problemstellungen führen würde. Aus den in Lehrbüchern noch vorhandenen Formulierungen und Beweisen der Sätze wird die konzeptuelle Tiefe und Vielfalt der Entwicklungsmöglichkeiten nicht mehr ersichtlich – sie scheinen verzichtbar. Wollte man eine rote Liste gefährdeter geometrischer Inhalte der Schulmathematik einführen, so fände man vermutlich darin an erster Stelle geometrische Sachverhalte, die die Allmächtigkeit der Rechtwinkligkeit in Frage stellen, wie den Umfangswinkelsatz und die Ähnlichkeitssätze am Kreis.

Die Bedeutung dieser Sätze für den Mathematikunterricht liegt vor allem in den vielfachen Möglichkeiten der Kontextualisierung, den Anwendungen und Variationen als Problemlösemethoden. Werden die vielfältigen Möglichkeiten der Entwicklung geometrischer Intuition und geometrischer Strategien, die auf den Ähnlichkeitssätzen beruhen, in fachdidaktischen Veranstaltungen entdeckt, aufgezeigt und umgesetzt, so fördert dies sicherlich Unterrichtsentwicklung zu diesem Thema in der Schule. Der Beitrag gibt einige Anregungen, wie der Sehnensatz in verschiedene kanonische mathematikdidaktische Themen integriert werden kann und somit zukünftigen Lehrenden seine Bedeutung für eine geometrische (schon sehr reduzierte) Grundausbildung leichter erkennbar wird.

2 Ene mene muh

Standen bei bisherigen Modernisierungs- und „Entschlackungs"aktionen konkrete Inhalte, die man unbedingt unterrichten sollte, wie z.B. Neuere Geometrie (Bender 1982), Funktionen und ihr Kalkül (Karp & Schubring 2013) oder Mengenlehre (Fehr 1966) zumindest als Motiv auf dem Plan, so könnte man die heutigen Bestrebungen – dem Geist der Zeit und der Verkürzung der Sekundarstufe II geschuldet – durch einen offenen Arbeitsauftrag beschreiben:

> Es muss weniger werden und der Rest soll übersichtlich, einfach zentral abprüfbar und durch einfache Bezeichnungen an den neuen Schubladen gut zu klassifizieren sein.

Die erste solche Entschlackung haben wir nun hinter uns. Ein Blick in die Mathematiklehrbücher zeigt gleichwohl, dass erfahrene, den Inhalten der Schulmathematik wohl doch eng verbundene Lehrbuchautoren kaum etwas wirklich dem *Entrümpeln* preisgegeben haben.

Einige Inhalte wurden – in Abhängigkeit von der Enge der Beziehung – in Übungen oder Exkurse verbannt, andere können – was dem geschulten Auge nicht entgeht – selbstständig entdeckt werden. Welche Inhalte weiter unterrichtet werden, bleibt also u.a. der Kreativität unserer Lehrer, der Eigendynamik zentraler Prüfungen und didaktischen Strömungen überlassen.

Die Nachhaltigkeit von Reformen der Lehr- und Lernkonzepte, sowie inhaltlicher Konzepte hängt auch mit der Bildung der Lehrenden und ihren Werten und Normen zusammen.

Inhalte der projektiven Geometrie verschwanden nicht während der Neuen Mathematik aus den Lehrbüchern (siehe z.B. Reidt et al. 1972), es bedurfte auch einer Generation von Mathematiklehrern und Schulbuchautoren, deren mathematische Bildung durch mengentheoretische Ansätze, Algebraisierung und Kalkülentwicklung geprägt wurde. Im universitären Mathematikstudium des gymnasialen Lehramts werden Einstiege in die projektive Geometrie durch Projektivisierungen linearer Räume und algebraische Beschreibungen projektiver Räume gegeben. Andererseits ist die Entwicklung elementarer Einstiege durch perspektivische Abbildungen, Modelle der projektiven Geraden und Ebene oder projektive Beweise elementargeometrischer Zusammenhänge aus der Perspektive höherer Mathematik ein anspruchsvolles Problem, dessen Bewältigung auch den meisten Mathematikdozenten nicht ohne weiteres Nachdenken gelingt. Es sollte deshalb nicht verwundern, dass im Laufe der letzten Jahrzehnte die mathematischen Tätigkeiten zu Kegelschnitten in der Schulmathematik auf Mustererkennung von Prototypen reduziert wurden.

Nicht jeder elementarmathematische Inhalt hat das Potential zu vielfältigen Entwicklungen mathematischer Herangehensweisen und motiviert zur Beschäftigung mit Mathematik. Diese Arbeit befasst sich mit der Frage, wie Veranstaltungen der Mathematikdidaktik einen Beitrag liefern können, elementarmathematische Inhalte, die dieses Potential besitzen, vor der nächsten Entschlackung zu bewahren. Wir zeigen an einem Beispiel, wie durch mathematikdidaktisch reflektierte Auswahl des Inhalts und durch dessen vielseitige und problemorientierte Behandlung die Verankerung des mathematischen Sachverhalts in der mathematischen Bildung der Studierenden unterstützt werden kann.

Mit der Bildung zukünftiger Lehrender beschäftigen sich auch die Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Die dort gegebenen Empfehlungen sind in zu entwickelnden Kompetenzen formuliert, wie etwa „Lehrende …

- führen elementare Konstruktionen mit Lineal und Zirkel durch und begründen diese,
- durchdringen geometrische Aussagen argumentativ in Begründungen und Beweisen,
- beschreiben geometrische Abbildungen, insbesondere Kongruenzabbildungen, Ähnlichkeitsabbildungen und Projektionen, führen sie konstruktiv durch und nutzen sie beim Lösen von Konstruktionsproblemen."

Wie wir im Folgenden zeigen, sind die Ähnlichkeitssätze am Kreis eine hervorragende inhaltliche Grundlage zur Entwicklung dieser angestrebten Kompetenzen. Die Darstellung dieser Inhalte als Beispiele vielfältiger Unterrichtsentwicklungen hat darüber hinaus das Ziel, sie wieder Teil unterrichteter Schulmathematik werden zu lassen. Inhalte, die Teil einer Geschichte sind, zum Grundrepertoire der Lehrerin oder des Lehrers gehören, die mit anderen Inhalten im Zusammenhang stehen oder durch besondere Schönheit beeindrucken, haben eine große Chance trotz Bildungsreformen weiter oder wieder unterrichtet zu werden.

3 Entwicklung und Darstellung der Ähnlichkeitssätze am Kreis in Schulbüchern

Der Sehnensatz steht in enger Beziehung zu Zusammenhängen im Sehnenviereck, im rechtwinkligen Dreieck, Ähnlichkeit am Kreis, dem geometrischen Wurzelziehen und dem Satz vom Umfangswinkel. Die Innenwinkelsumme im Dreieck, der Basiswinkelsatz im gleichschenkligen Dreieck, der Satz des Thales und die Satzgruppe des Pythagoras werden in den meisten Lehrbüchern bewiesen und danach als Problemlösemethode angewandt. Wenn überhaupt, werden Sehnensatz, Sekantensatz und Sekanten-Tangentensatz als Anwendung des Ähnlichkeitskriteriums gleicher Winkel und somit gleicher Seitenverhältnisse entsprechender Dreiecke behandelt.

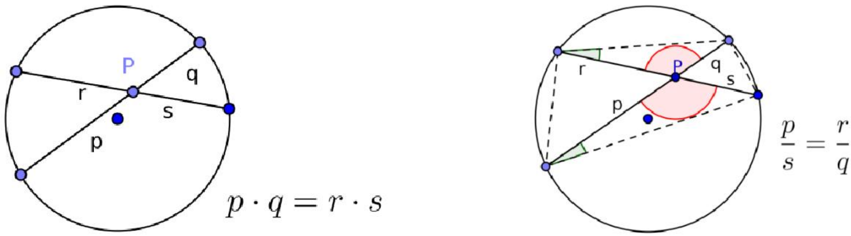


Abbildung 1: Formulierung (links) und Beweis des Sehnensatzes (rechts)

Die Beweise werden auf der Grundlage ikonischer Darstellungen mit den notwendigen Hilfslinien und farbigen Kennzeichnungen geführt (Abb. 1 links und Abb. 1 rechts). Die Beweisführung besteht in der Übertragung der ikonischen Darstellungen in symbolische und in Termumformungen der gewonnenen Ausdrücke.

Das im Beweis benutzte Argument, welches von ähnlichen Dreiecken auf die entsprechenden Seitenverhältnisse schließt, wird bei der Behandlung ähnlicher Figuren in den entsprechenden Schulbuchkapiteln zum Thema Ähnlichkeit kaum problematisiert. Es werden nur ähnliche Dreiecke behandelt, die das Resultat einer zentrischen Streckung oder Stauchung sind oder welche durch parallele Geraden definiert sind (Abb. 2).

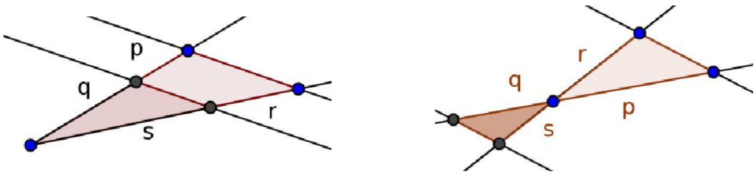
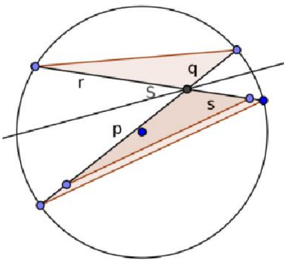


Abbildung 2: Kanonische ikonische Darstellungen ähnlicher Dreiecke zur Vorbereitung der symbolischen Darstellung durch Strahlensätze

Die Bedeutung einer breiten Vorbereitung und Motivation des Begriffs und der Methode Ähnlichkeit ist in der mathematikdidaktischen Literatur vielfältig diskutiert, siehe z.B. Steinbring 1986 und Führer 2004. An dieser Stelle könnte die z.B. im Rahmenlehrplan des Landes Rheinland-Pfalz formulierte Idee, als Vertiefung *ähnliche Figuren durch Verkettung einer zentrischen Streckung mit Kongruenzabbildungen aufeinander abzubilden*, eine Motivation erfahren: die entsprechenden Abbildungen der Dreiecke im Kreis sind die Komposition einer Streckung und einer Geradenspiegelung an der Winkelhalbierenden.



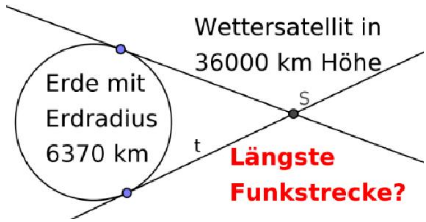


Abbildung 3: Abbildungsgeometrische Herleitung der Ähnlichkeit der Dreiecke (links), typische Anwendung des Tangenten-Sekantensatzes (rechts)

Die beim Beweis notwendigen mathematischen Tätigkeiten sind Übersetzungen geometrischer Äquivalenzen wie Ähnlichkeit und Kongruenz in algebraische Gleichungen, Umformungen der Terme der Gleichungen um zu neuen Gleichungen zu kommen, Interpretationen algebraischer Zusammenhänge in geometrischen Kontexten. Die Sätze werden durch Kontexte, in denen es um Vermessungen und Bestimmung fehlender Größen geht, angewandt. Die hier gegebenen Zusammenhänge sind dabei schon durch Skizzen in geometrische Zusammenhänge übersetzt, der Text dient zur Angabe der gegebenen und zu berechnenden Größen. Eine typische Anwendung des Sehnen-Tangentensatzes dieser Art haben wir dem Lehrbuch *Neue Wege* (Lergenmüller et al. 2013) entnommen (Abb. 3 rechts). Die Anwendungen sind gleichwohl eher Einkleidungen als Nutzung der geometrischen Methoden *Ähnlichkeit* oder *Flächenumformung durch Quadrieren*. Eine Entwicklung des *Sehnensatzes* als geometrisches Werkzeug erfolgt kaum.

Die Begriffsentwicklung des Sehnensatzes als Teil der mathematischen Sprache und Theorie ist vorwiegend deduktiv: Einführung von Bezeichnungen und kennzeichnenden Merkmalen, darauf basierende Kalkülentwicklung oder Klassifikation mithilfe dieser Merkmale, illustrierende Beispiele.

Die Vorteile deduktiver Darstellungen (z.B. Übersichtlichkeit der Begriffsentwicklung, Klarheit der Definition und der Konstruktion des Objekts und der zulässigen

Operationen) kommen viel stärker zum Tragen, wenn im Unterricht auch über Plausibilität, logisches Schließen, Offensichtlichkeit von Annahmen, Äquivalenz von Aussagen und Beschreibungen usw. diskutiert wird. Die Satzgruppe des Pythagoras und die Ähnlichkeitssätze am Kreis bieten hervorragende Möglichkeiten, einen Diskurs zu philosophischen und historischen Fragestellungen zum Beweisen in der Mathematik in das Mathematiklehramtsstudium und so vielleicht auch in die Schule zu bringen. Zur Satzgruppe des Pythagoras gibt es zahlreiche historische und philosophische Beiträge, die als weitere Materialien in einen fachdidaktischen Exkurs zur Geschichte des Sehnensatzes einbezogen werden können. Als sehr geeignete Beispiele seien hier Benno Artmanns historische Kontextualisierungen und Kommentare der mathematischen Konzepte der Bücher des Euklid (Artmann 1999) und Peter Baptists Beitrag zum ästhetischen Reiz des Satzes des Pythagoras (Baptist 1996) genannt.

4 Geschichte der Mathematik im Unterricht am Beispiel des Sehnensatzes

In den Mathematiklehrbüchern findet man zahlreiche Beweise des Satzes des Pythagoras, fast immer auch den *Euklidischen* Beweis [EE Buch I Satz 47] als Ausschnitt einer Übersetzung der historischen Quelle.

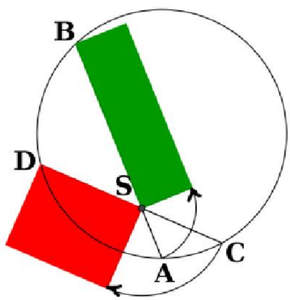
Dadurch können Vorstellungen von einer sich nicht verändernden Mathematik, die zu verschiedenen Zeiten von Mathematikern entdeckt und interpretiert wird, entstehen (siehe auch Nickel 2013). Dieses Bild einer starren, fertigen Mathematik kann auch durch die in Mathematikvorlesungen vorherrschende deduktive Darstellung mathematischer Ideen entstanden sein und fördert nicht den Anspruch späteren lebendigen, erkundenden Mathematikunterrichts (Weiss-Pidstrygach et al. 2013). Solche Einstellungen zur Mathematik können in einer mathematikdidaktischen Veranstaltung in einem fächerübergreifenden Diskurs aufgegriffen werden und zur Reflexion vorhandener Vorstellungen der Studierenden von Mathematik beitragen. Dies kann durch eine philosophische Kontextualisierung z.B. durch Platons Ideenlehre oder auch durch eine mathematikhistorische Problemstellung, die sich z.B. mit der Lehrbuchdarstellung auseinandersetzt, geschehen. Beispiele für historiographisch inspirierte Problemstellungen sind:

- Welche Informationen können wir aus Bezeichnungen und Kontextualisierungen erhalten? (Indiogine & Kulm 2009)
- Ist „Whig“ Historiographie im Unterricht zulässig? (Fried 2001)
- Haben die alten Griechen quadratische Gleichungen gelöst? (Jahnke 1991)

- Unterscheiden sich Übersetzungen eines mathematischen Textes? Was wissen wir über die Intentionen verschiedener Übersetzer und Kommentatoren? (Vergleich der Übersetzungen von Euklids Elementen durch Heath, Thaer und Fitzpatrick, Schönbeck 2003)
- Sollte sich Begriffsentwicklung im Unterricht an historischen Entwicklungen orientieren? (Toeplitz 1927)

Die hier genannten Literaturempfehlungen wurden von uns in fachdidaktischen Lehrveranstaltungen erfolgreich eingesetzt. Sie können Grundlage für einen Exkurs über drei Seminare bis zu einem Lektürekurs über ein ganzes Semester bilden. Diese konzeptuelle Entwicklung mathematikhistorischer und mathematikphilosophischer Bezüge ist komplex und bedarf deshalb einer gewissen interdisziplinären Vorbereitung. Jede dieser Fragestellungen erlaubt jedoch auch eine Einschränkung der anfänglich breit angelegten Diskussion auf Herleitung, Beweis und Anwendung der Ähnlichkeitssätze am Kreis in der antiken Mathematik.

Eine einfachere Art mathematikhistorische Fragestellungen in das mathematikdidaktische Studium zu integrieren, wäre die Beschäftigung mit historischen Quellen, ausgehend von Darstellungen in Mathematiklehrbüchern. Eine Fragestellung, welche Lehramtsstudierende bei Euklid die Lösung für eine Geometrieaufgabe suchen lässt, ist die Frage, um welche Flächen es sich bei den Produkten der Sehnenabschnitte handelt. Im Mathematiklehrbuch Neue Wege (Lergenmüller et al, S.63-64) wird der Sehnensatz, wie im vorigen Absatz skizziert, mit Hilfe von Ähnlichkeit bewiesen. Die anschließende Visualisierung zeigt die im Sehnensatz beschriebene Gleichheit der Produkte der Sehnenabschnitte als gleichgroße Rechtecksflächen (Abb. 4).



$$\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD}$$

Abbildung 4: Visualisierung des Sehnensatzes in Produktform (nach Neue Wege, Klasse 9)

Vom Satz des Pythagoras wissen die meisten Schüler und Studierende, dass diese Flächengleichheit durch Zerlegen einer Figur und Zusammensetzen in Form der gewünschten Figur durchgeführt werden kann. Handlungsorientiertes Motivieren des Beweises einer Flächengleichheit setzt das Verständnis der expliziten Flächenumformung voraus, wobei Zerlegungsgleichheit für entdeckendes Lernen mit einem Puzzle oft intuitiver zu realisieren ist als Ergänzungsgleichheit. Die Skizze in Abbildung 4 ist nur eine Visualisierung der Flächengleichheit und sagt nichts über die für die Realisierung notwendigen Operationen. Die Frage nach den Flächen im Sehnensatz ist also durchaus plausibel und ein guter Anfang, nach einer Interpretation der Produkte als Flächen und einem Beweis durch Flächenumwandlung zu suchen.

Wie man sich selbst überzeugen kann, ist die Antwort auf die Frage nicht offensichtlich und ein eigenständiger Beweis nicht einfach, so dass für viele Studierende die Suche nach einer Lösung im Internet naheliegend ist. Eine Erwähnung der Quellen der behandelten elementargeometrischen Sätze in mathematikdidaktischen Veranstaltungen führt direkt zu einer Lösung: Der heute als Sehnensatz bekannte Zusammenhang wird in Euklids Elementen im Buch III Satz 35 bewiesen. Die Proportionenlehre und damit die Grundlagen für einen Ähnlichkeitsbeweis werden erst in Buch V eingeführt. Die Suche nach einem Flächenbeweis führt also in diesem Fall direkt zu einem Beweis in der historischen Quelle. Die Beschäftigung mit dem Sehnensatz anhand des historischen Textes gibt nicht nur die Möglichkeit mathematisches Verständnis zu vertiefen, sie regt auch zur Reflektion über die Entwicklung von Mathematik an. Der Euklidische *Sehnensatz,* (III.35) benutzt sowohl den Satz des Pythagoras (EE I Satz 47) als auch Zusammenhänge, die heute durch binomische Formeln beschrieben werden (EE II Satz 5). Die Herleitung des Satzes des Pythagoras unterscheidet sich kaum von den Darstellungen in den Schulbüchern. Die verbale Form und die Bezeichnungen der Strecken durch Endpunkte stellen kein Problem für die Studierenden dar, da sie in Euklids Elementen von einer Skizze in Form der bekannten Mathematiklehrbuchdarstellung begleitet werden. Letzteres haben wir wiederholt in fachdidaktischen Veranstaltungen beobachten können.

Eine alleinige Beschäftigung mit dem Satz des Pythagoras anhand einer Übersetzung der historischen Quelle könnte bei den Studierenden zu der Vorstellung führen, dass sich die heutigen Denk- und Herangehensweisen im Geometrieunterricht kaum von denen des Euklids unterscheiden. Eine andere Einsicht entsteht durch die Beschäftigung mit Satz 5 Buch II, der ebenfalls für den Euklidischen Beweis des Sehnensatzes verwendet wird und uns als Termumformung der binomischen Formel bekannt ist. Die Auseinandersetzung mit der verbalen Form des geometrischen Zusammenhangs zwischen verschiedenen Flächen macht deutlich, wie stark unsere heutigen Beweisverfahren durch die Darstellung von Flächen als algebraische Terme und deren Umformungen geprägt sind. Die Erfahrung, dass verschiedene algebraische Beschreibungen ein und denselben geometrischen Zusammenhang beschreiben können, ist für viele Studierende neu.

Der Beweis des Sehnensatzes bei Euklid stellt für die meisten Studierenden eine mathematische Herausforderung dar. Er nutzt Axiome und Sätze, die auf drei Bücher verteilt sind und seine Logik scheint einem Leser, dem der einfache Ähnlichkeitsbeweis vertraut ist, eher umständlich und schwer nachvollziehbar. Das Verständnis, dass ein Beweis als der *einfachere* angesehen werden kann, wenn er nur Methoden nutzt, die auf weniger Bedingungen aufbauen, kann eine neue Einsicht auf mathematische Einfachheit und Offensichtlichkeit geben (siehe auch Barbin 2000). Die Frage nach den Flächen beim Sehnensatz kann also zur problemorientierten Beschäftigung mit der historischen Quelle *Euklids Elemente* führen, wobei Darstellungen mathematischer Inhalte anzutreffen sind, die im Vergleich zur modernen bekannten Darstellung im Mathematiklehrbuch

- sowohl in Herleitung und Darstellung sehr ähnlich sind (EEI Satz 47),
- in der Herleitung ähnlich sind, sich jedoch in der Darstellung stark unterscheiden (EEII Satz 5),
- sich in Darstellung und Herleitung stark unterscheiden (EEIII Satz 35).

Das skizzierte fachdidaktische mathematikhistorische Projekt kann bei entsprechender Vorbereitung und zurückhaltender Begleitung des Lehrenden ein Lernen unterstützen, dass im hohen Maße durch *eigene aktive Erfahrungen* und *selbständige entdeckerische Unternehmungen* geprägt ist (siehe Winter 1991).

Hilfreiches Vorwissen für die selbständige Beweissuche und Reflexion zur Darstellung in Euklids Elementen ist ein Überblickswissen zu Inhalten und mathematischen Methoden der ersten Bücher der Elemente des Euklid.

Die Visualisierung in Abb. 4 birgt die Frage, *warum* die Flächen gleich sind und *wie* sie durch Flächenumwandlung ineinander überführt werden können. Damit die Flächengleichheit von den Studierenden als Phänomen wahrgenommen wird und sich das Bedürfnis nach dem Verständnis der Flächeninhaltsumformung entfalten kann, sollte in der mathematikdidaktischen Veranstaltung hinreichend Zeit und Möglichkeiten zur Diskussion und zur Entwicklung von Zusammenarbeit eingeplant werden.

Gemeinsame Präsentationen, Essays, Hausarbeiten eignen sich gut die Zusammenarbeit zu diesem Thema zu strukturieren. Das Thema bietet auch vielfältige Möglichkeiten der Vertiefung, die in Bachelor- oder Masterarbeiten realisiert werden können.

Die nächsten Absätze sind der Behandlung dieser Inhalte als Beispiele entdeckenden Lernens zu kanonischen Themen mathematikdidaktischer Veranstaltungen gewidmet.

5 Begriffsentwicklung am Beispiel des Sehnensatzes

Den theoretischen Rahmen für die in diesem Absatz angewandten Modelle zur Entwicklung mathematischer Begriffe im Unterricht bilden Arbeiten der französischen Schule um Douady (Douady 1997, Artigue et al. 2001) und tätigkeitstheoretische Ansätze (Weiss-Pidstrygach 2011).

5.1 Mathematische Begriffe als Untersuchungsgegenstand und als Problemlösemethode

In diesem Absatz stellen wir am Beispiel des Sehnensatzes Überlegungen an, zu denen Studierende im Rahmen der mathematikdidaktischen Sachanalyse einer Unterrichtsplanung gelangen können. Wir beginnen mit einer Begriffsentwicklung über mehrere Unterrichtseinheiten für die Schule und widmen uns dann Aspekten des lokalen Ordnens. In beiden Fällen werden die Ähnlichkeitssätze als Teil der mathematischen Sprache und Theorie entwickelt. Wir diskutieren an dieser Stelle nur Aspekte, die sich am Beispiel der Ähnlichkeitssätze besonders schön erarbeiten lassen, wie Variation der Herleitung und Vernetzung der Ähnlichkeitssätze, weitere Beispiele sind in Weiss-Pidstrygach 2012 zu finden.

Beim lokalen Ordnen liegt der Fokus auf der Variation der Formulierung der Ähnlichkeitssätze, Variation der Beweismethoden und Anwendungen und den dafür notwendigen Fertigkeiten.

Danach betrachten wir die Begriffsentwicklung der Ähnlichkeitssätze als Problemlösemethode. Hier stehen Hilfslinien, Variationen der Einbettung in andere geometrische Figuren, Einbeziehung anderer Kontexte im Vordergrund. Unter Entwicklung des mathematischen Begriffs *Ähnlichkeitssätze am Kreis* verstehen wir ein Wechselspiel zwischen Sprachentwicklung und Methodenentwicklung (siehe Douady 1997). Die zugrunde liegende einfache Strategie ist dabei, möglichst nur eine Bezeichnung einzuführen, deren Bedeutung auch für die Lösung konkreter Probleme genutzt werden kann und möglichst Aufgaben zu stellen, deren Lösungsmethode formalisiert und übertragen werden kann und dadurch nicht wie ein spezieller Zaubertrick aussieht.

5.2 Der Sehnensatz als Teil der mathematischen Sprache und Theorie

Die Ähnlichkeitssätze am Kreis eignen sich hervorragend zu zeigen, dass die Mathematik weniger hierarchisch aufgebaut ist, als es die meisten Mathematikvorlesungen vermuten lassen würden. Die Herleitung des durch die Ähnlichkeitssätze beschriebenen geometrischen Zusammenhangs ist auf verschiedene Weisen möglich (Abb. 5).

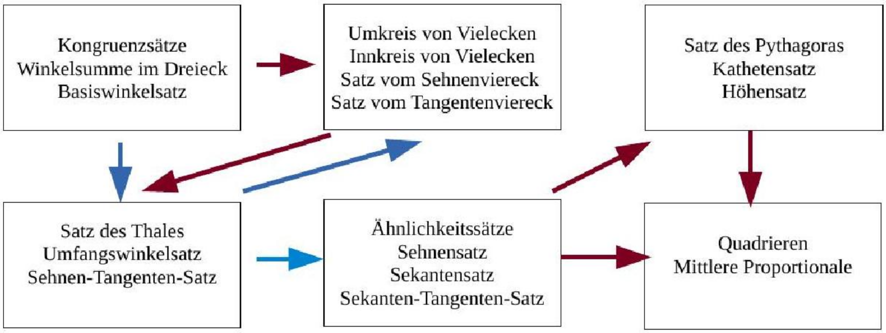


Abbildung 5: Verschiedene Möglichkeiten der Herleitung und Vernetzung des Sehnensatzes mit anderen Themen des Geometrieunterrichts

Die Satzgruppe des Pythagoras kann vor den Ähnlichkeitssätzen behandelt werden und die für den Ähnlichkeitsbeweis notwendige Umformulierung der Flächengleichheit in eine Gleichheit von Seitenverhältnissen motivieren (Weiss-Pidstrygach 2014).

Die Ähnlichkeitssätze können auch direkt als Anwendung des Umfangswinkelsatzes (siehe Abb. 1 rechts) oder im Kontext der Herleitung der Eigenschaften eines Sehnenviereckes bewiesen werden (Abb. 6).

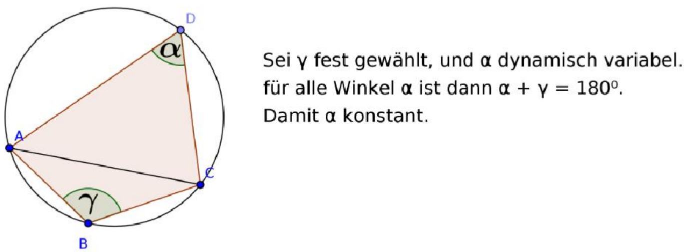


Abbildung 6: Verschiedene Möglichkeiten der Herleitung und Vernetzung des Sehnensatzes mit anderen Themen des Geometrieunterrichts

Auch über Spiegelungen und Streckungen kann man den Sehnensatz begründen (Abb. 7). Um die vielfältigen Möglichkeiten der Entwicklung des mathematischen Zusammenhangs Sehnensatz sichtbar zu machen, bietet es sich an, die verschiedenen Genesen der geometrischen Gebilde *Sehnenviereck, Viereck mit Umkreis, Sehnenabschnitte im Kreis* und *ähnliche Dreiecke an sich kreuzenden Geraden* in didaktischen Sachanalysen zu entwickeln. Dabei bieten diese unterschiedlichen Kontextualisierungen und Herleitungen vielfache Möglichkeiten, die verschiedenen Darstellungen des Sehnensatzes in Zusammenhang zu setzen und zu formalisieren. Zur Erkennung des in verschiedenen Interpretationen dargestellten Zusammenhangs ist Einheitlichkeit in Bezeichnungen, Entwicklung von einheitlichen ikonischen Prototypen und Nutzung von Farben zur Mustererkennung hilfreich. Wie Abbildung 7 zeigt, ist auch beim Erkunden verschiedener Möglichkeiten der Herleitung entdeckendes Lernen leicht zu inspirieren. Die Verwendung von Dynamischer Geometrie-Software (DGS) eröffnet zusätzliche Möglichkeiten, Lernende mit sehr unterschiedlichen Voraussetzungen einzubeziehen. Das Spektrum an mathematisch sinnvollen, zu Erfolgen führenden Tätigkeiten reicht vom Probieren, Experimentellen Variieren, Aufstellen von Vermutungen, Betrachten symmetrischer Spezialfälle, Arbeiten in Koordinaten, Betrachten abbildungsgeometrischer Invarianten (Abb. 7) bis zum Beweisen. Schöne Anregungen zum Arbeiten mit DGS findet man in dem inspirierenden Buch von Dörte Haftendorn (Haftendorn

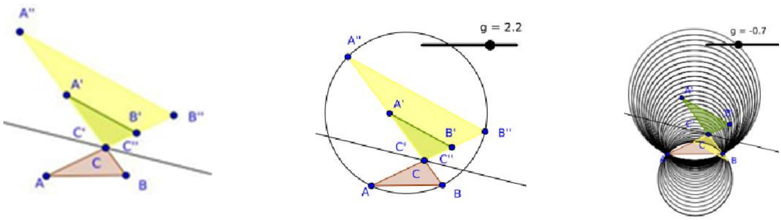


Abbildung 7: Spur der Außenkreise (A,B,A') nach Spiegelung und Streckung des Dreiecks ABC

Die in Abb. 8 skizzierten vielzähligen Möglichkeiten der Variation von Definitionen, Herleitungen und Vernetzungen der Ähnlichkeitssätze am Kreis bieten eine breite Grundlage zur Entwicklung eigenständigen Unterrichtens.

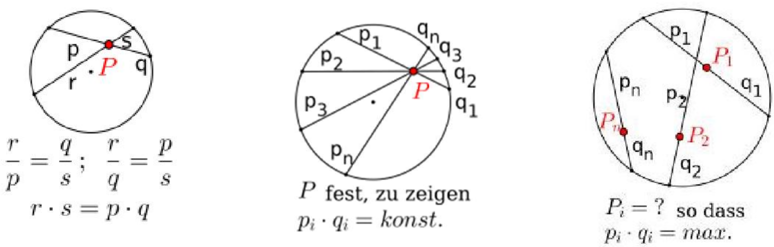
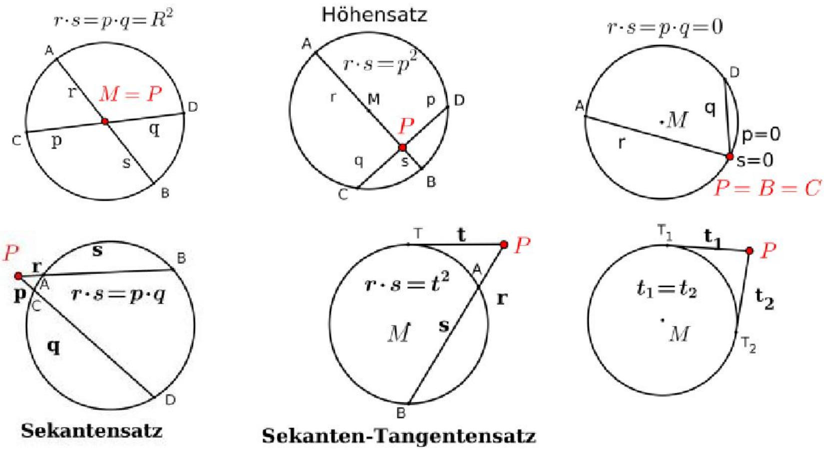


Abbildung 8: Beispiele zur Variation der Problemstellung

Weitere Möglichkeiten am Beispiel der Ähnlichkeitssätze Variation als Methode zur Unterrichtsentwicklung auszuprobieren, sind Unterrichtsplanungen zu Formulierungen, Darstellungen und Beweisen der drei Sätze als Variation des Zusammenhangs zweier sich und einen Kreis schneidender Geraden. Hier sind vor allem Strukturen des lokalen Ordnens zu beachten, um die Invarianten der Variationen sichtbar und gut nachvollziehbar werden zu lassen (Abb. 9 und Abb. 10).



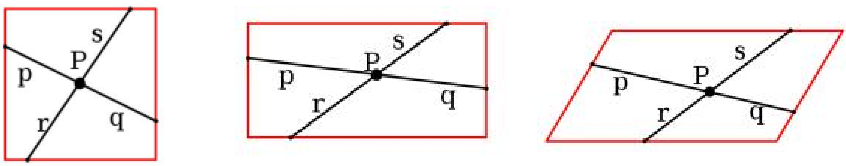


Abbildung 9: Variation der Lage des Punktes P und der beiden Geradenabschnitte

Abbildung 10: Variation der Ausgangsobjekte, hier des Kreises

Eigenständiges entdeckendes Untersuchen möglicher Variationen einer geometrischen Konstellation mit dem Ziel der Erhaltung des strukturellen Zusammenhangs oder der Eröffnung einer neuen Sichtweise auf die Struktur setzt Verständnis der Methode Variation voraus. An dieser Stelle sollte deshalb Variation als Methode zum Entwickeln mathematischer Begriffe und mathematischer Strategien reflektiert und vertieft werden. Anregungen zum Entwickeln eigener weiterer Variationen können Studierende u.a. bei George Polya (z.B. Polya 1969) und Hans Schupp (z.B. Schupp 2002) finden.

5.3 Der Sehnensatz als Problemlösemethode

In diesem Absatz wollen wir uns einigen Anwendungen des Sehnensatzes widmen. Wir werden auch hier anhand des Sehnensatzes Fragestellungen eines kanonischen mathematikdidaktischen Themas diskutieren – *Konstruieren und Problemlösen im Geometrieunterricht*. Dabei beschränken wir uns auf Anwendungen, welche die im vorigen Abschnitt erfolgte Begriffsentwicklung fortsetzen und auf Probleme, in denen der Sehnensatz in einem neuen Kontext als Problemlösemethode auftritt und entwickelt wird.

Eine schöne Anwendung des Sehnensatzes, die man in Lehrbüchern findet, ist der Beweis des Höhensatzes als Spezialfall des Sehnensatzes (Abb. 9, oben Mitte).

An dieser Stelle treffen zwei Zugänge aufeinander: die durch Ähnlichkeit bewiesene Aussage über Seitenverhältnisse (Abb. 11) und eine Aussage zur Flächengleichheit verschiedener Figuren (Abb. 12).

Abbildung 11: Skizze zum Beweis des Höhensatzes über Ähnlichkeit der zwei schraffierten Dreiecke

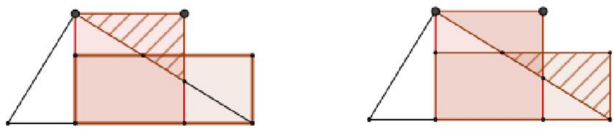
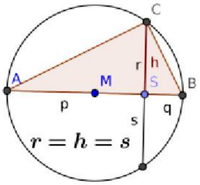


Abbildung 12: Skizze zum Beweis des Höhensatzes über Zerlegungsgleichheit der Rechtecke

Hier sollten verträgliche Bezeichnungen und Farben verwendet werden, um die Übertragung von einem Kontext in den anderen zu erleichtern. Es bietet sich auch an, durch Einbeziehung des Satzes 5 Buch II antike Methoden zum Nachweis von Flächengleichheit mithilfe eines Gnomons zu wiederholen.



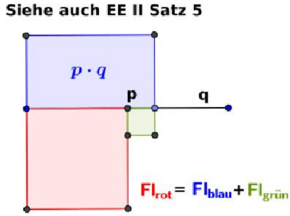
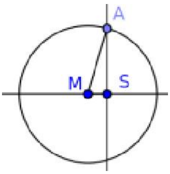


Abbildung 13: Herleitung des Höhensatzes als Spezialfall des Sehnensatzes mit einer Sehne als Durchmesser und der anderen Sehne orthogonal zum Durchmesser (links) und Skizze EEII Satz 5 (rechts).

Eine Diskussion zum Zusammenhang dieser Technik mit dem Lösen quadratischer Gleichungen findet man in vielen Texten zur geometrischen Algebra (siehe auch Artmann 1999). Aus der Flächengleichheit (Abb. 13 rechts), dem Sehnensatz und der Konstruktion der entsprechenden Sehnen für ein gegebenes rechtwinkliges Dreieck MSA (Abb. 14) können wir nun unmittelbar auch den Satz des Pythagoras folgern:



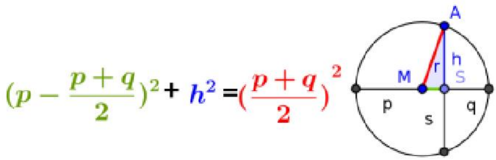


Abbildung 14: Verschiedene Möglichkeiten der Herleitung und Vernetzung des Sehnensatzes mit anderen Themen des Geometrieunterrichts

Die Lösung dieser Aufgaben beruht auf dem Darstellungswechsel zwischen geometrischen (Ähnlichkeitsargumente, Flächenumwandlung) und algebraischen Sichtweisen (Aufstellen von Gleichungen und Termumformungen). Zum reflektierten Formalisieren dieser Vorgehensweisen betrachten wir die folgende Aufgabe:

Gegeben seinen drei Strecken der Länge p, q und r. Konstruiere eine vierte Strecke, deren Länge s die Gleichung p · q = r · s erfüllt. Die verschiedenen Lösungswege verdeutlichen nochmals den Perspektivwechsel (Abb. 15).

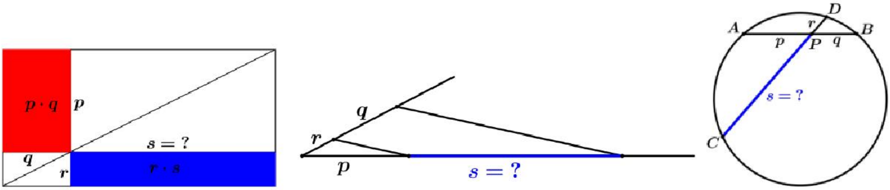


Abbildung 15: Konstruktion mit Gnomon (links), Konstruktion mit Ähnlichkeit (Mitte), Konstruktion mit Sehnensatz (rechts)

Bei einer dynamischen Konstruktion mithilfe des Sehnensatzes können durch die Nutzung von *Spuren* von Punkten und *geometrischen Orten* (in Abb. 16 Mittelpunkt des *Sehnenkreises*) unerwartete Muster zum Vorschein treten. Die Frage nach der tieferen Ursache kann *w*eitere selbstständige Untersuchungen der Studierenden initiieren (siehe auch Müller-Sommer 2004).

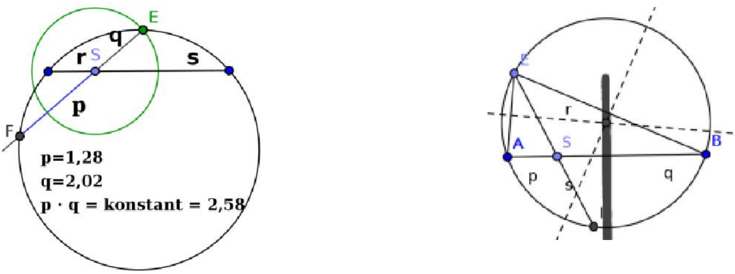


Abbildung 16: Entdeckung einer Familie von Sehnen bei gegebenen Streckenabschnitten r und s, sowie Länge q vorgegeben (links), Entdeckung von Eigenschaften der Mittelpunkte der durch drei Punkte definierten dazugehörigen Kreise (rechts)

Ein Kontext, der durch implementierte Werkzeuge in dynamischen Geometriesystemen ins Spiel kommt, ist hyperbolische Geometrie. Durch Inversion der gegebenen Geraden am gegebenen Kreis kann die Vermutung gewonnen werden, dass die Inversion winkeltreu ist (Abb.17).

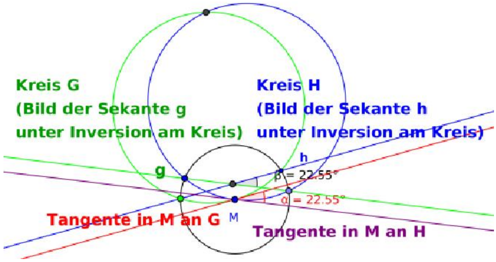
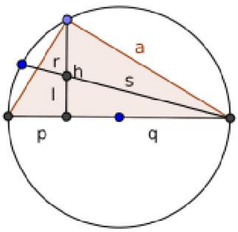


Abbildung 17: Entdeckung der Winkeltreue der Inversion am Kreis

Eine schöne Anwendung des Sehnensatzes zur Verallgemeinerung des Kathetensatzes auf den nicht-rechtwinkligen Fall findet man bei Artmann et al. 2003 (Abb. 18).



$$(p+q)\cdot q = a^2 = (r+s)\cdot s$$

Beweisskizze

$$(r+s)s = r\cdot s + s^2$$

Nach dem Sehnensatz

$$r\cdot s = (h+l)(h-l)$$

$$(r+s)\cdot s = h^2 - l^2$$

$$= h^2 + q^2$$

$$= a^2$$

Abbildung 18: Verallgemeinerung des Kathetensatzes

Ein tieferes Verständnis dieser algebraischen Termumformung wird in dem zitierten Beitrag durch eine Lösung mit einer Inversion am Kreis möglich. Dadurch wird ersichtlich, dass auch Abbildungen, die Geraden nicht erhalten, trotzdem zu neuen Einsichten in die Dreiecksgeometrie verhelfen können. Das folgende Problem ist ein Klassiker und hat viele schöne Beweise. Sei H der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ABC und A', B' und C' die Fußpunkte der Höhen. Zeige, dass |AH|·|HA'| = |BH|·|HB'| = |CH|·|HC'|.

Wir führen einen Beweis mithilfe des Sehnensatzes. Zeichnet man den Thaleskreis über AB, so ist in ihm nach dem Sehnensatz |AH|·|HA'| = |BH|·|HB'| (Abb. 19 Mitte). Zeichnet man den Thaleskreis über BC, so folgt |BH|·|HB'| = |CH|·|HC'|.

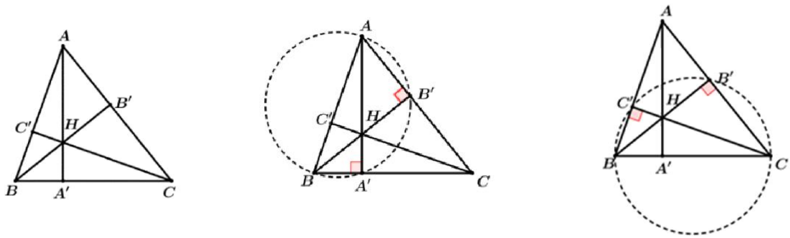


Abbildung 19: Skizze zur Aufgabe zum Höhenschnittpunkt (links), Beweisidee (Mitte, rechts)

Viele schöne Anwendungen und weiterführende Geometrieaufgaben findet der Leser bei Specht & Strich (2001). In der Geometrie sind Problemlösen und Beweisen sehr eng miteinander verbunden. Dabei werden Konstruktionsaufgaben oft durch Rückwärtsarbeiten gelöst und setzten das Verständnis von Zusammenhängen voraus, die erst durch Hilfslinien sichtbar werden oder auch in anderen Kontexten algebraisch formalisiert wurden. Begründen und Beweisen geometrischer Sachverhalte sind oft reich an verbalen Erklärungen, Visualisierungen und leicht nachvollziehbaren algebraischen Termumformungen und oft elementarer als analytische Beweise (siehe auch Peters 1985). Die Perspektivwechsel zwischen Analyse und Synthese, Konstruktion und Berechnung sind wichtige Elemente der Unterrichtsentwicklung und können beim Lösen geometrischer Problemstellungen besonders klar reflektiert und nachvollzogen werden (siehe auch Weiss-Pidstrygach 2011).

6 Begründen und Beweisen am Beispiel des Sehnensatzes

Die Satzgruppe des Pythagoras ist ein dankbarer Inhalt, um das Thema Begründen und Beweisen in fachdidaktischen Veranstaltungen zu diskutieren. Zahlreiche Materialien und Literatur können hier die Grundlage für eine detaillierte didaktische Sachanalyse von Beweisen des Satzes des Pythagoras sein, sowohl durch Flächenumwandlung als auch durch Ähnlichkeit. Die zahlreichen Materialien können gleichwohl auch dazu führen, dass Herleitung und Beweisführung unreflektiert übernommen werden und somit die aktive selbstständige Auseinandersetzung mit der Argumentation, Kontextualisierung und Darstellung unterbleibt. Der Sehnensatz bedient weniger automatisierte Denkroutinen. Im Folgenden geben wir daher einige Beweise des Sehnensatzes, welche nicht weniger als der Satz des Pythagoras zur Illustration didaktischer Ansätze geeignet sind. Durch die Herleitung des Höhensatzes und des Satzes des Pythagoras aus dem Sehnensatz (Absatz 5.3) können diese Beweise auf den Satz des Pythagoras und den Höhensatz übertragen werden.

Wir beginnen mit dem Ähnlichkeitsbeweis, den wir schon bei der Darstellung der Ähnlichkeitssätze am Kreis in Schulbüchern erwähnt haben (Abb. 1). Dieser Beweis kann unmittelbar auf den Sekantensatz und den Sekanten-Tangentensatz übertragen werden. Er eignet sich deshalb besonders gut zur Demonstration der Methode *Variation*. Wir schreiben die Beweisschritte so auf, dass sie trotz der variierten Bedingungen bezüglich der Schnittpunkte der Geraden, bei den Beweisen der drei Sätze die gleichen bleiben:

- Umformulieren der Flächengleichheit in eine Aussage von gleichen Seitenverhältnissen,
- Finden der Dreiecke, deren Seiten die Aussage betrifft,
- Beweis der Ähnlichkeit der Dreiecke,
- Aufschreiben des Beweises in umgekehrter Richtung, beginnend mit der Ähnlichkeit der Dreiecke.

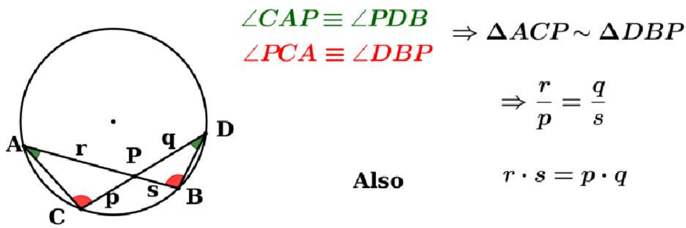


Abbildung 20: Beweis des Sehnensatzes

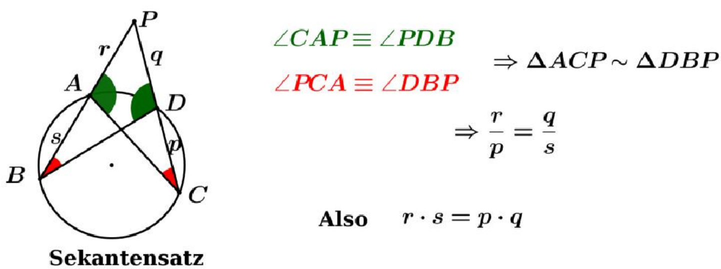
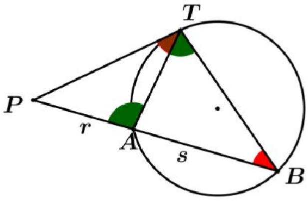


Abbildung 21: Beweis des Sekantensatzes als Variation des Ähnlichkeitsbeweises des Sehnensatzes

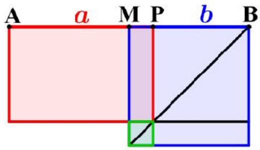


$$\color{green}{\angle TAP \equiv \angle PTB}$$
$$\color{red}{\angle PTA \equiv \angle TBP} \quad \Rightarrow \Delta ATP \sim \Delta TBP$$
$$\Rightarrow \frac{r}{|PT|} = \frac{|PT|}{s}$$
Also $|PT|^2 = r \cdot s$

Abbildung 22: Beweis des Sekanten-Tangentensatzes als Variation des Ähnlichkeitsbeweises des Sehnensatzes

Mit dem nächsten Beweis widmen wir uns wieder unserem Ausgangspunkt eigenständiger entdeckender Beschäftigung Studierender mit dem Beweis des Sehnensatzes – der Frage nach der Flächengleichheit der im Lehrbuch Neue Wege abgebildeten Rechtecke.

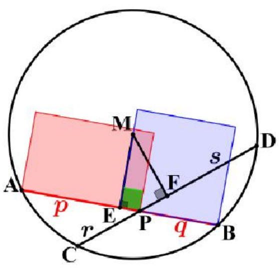
Der im Absatz 4 angesprochene historische Exkurs in Euklids Elemente, führt zu einem Beweis, der den folgenden Gnomon verwendet.



$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = a \cdot b + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Abbildung 23: Satz 5 Buch 2 der Elemente Euklids

Die Visualisierung des darauf beruhenden Flächenbeweises entspricht nicht der im Lehrbuch angegebenen Darstellung (Abb. 4), und bedarf Hilfslinien, die nicht kanonisch und unmittelbar einsichtig sind (Abb. 24).



$$p \cdot q + Fl_{EP} = Fl_{EB} \quad / + Fl_{ME}$$
$$p \cdot q + Fl_{EP} + Fl_{ME} = Fl_{EB} + Fl_{ME}$$
$$p \cdot q + Fl_{MP} = Fl_{MB}$$

Analog folgt:

$$r \cdot s + Fl_{MP} = Fl_{MD}$$

Da $Fl_{MB} = Fl_{MD} \Rightarrow p \cdot q = r \cdot s$

Abbildung 24: Visualisierung von Euklids Beweis

Nun könnte unser Leser meinen, dass erkundendes Lernen doch nicht das Nachforschen in historischen Quellen zum Ziel hat. Diese Leser bitten wir, nach eigenen Beweisen der Flächengleichheit durch Flächenumwandlung zu suchen. Wir haben dies auch getan und haben den folgenden Beweis gefunden, der uns aus der Literatur nicht bekannt ist.

Ein kanonischer und im Falle des Satzes des Pythagoras leicht nachvollziehbarer Beweis der Flächengleichheit der beiden Rechtecke der Schulbuchabbildung ist ein Beweis durch Flächenscherung. Der folgende Scherungsbeweis des Sehnensatzes ist etwas komplizierter – die Rechtecksfläche wird zerlegt und dann in zwei Teilen geschert.

Wir führen die Scherung für den Fall aus, dass eine der Sehnen der Durchmesser ist. Dies bedeutet keine Einschränkung: Im Falle zwei beliebiger Sehnen scheren wir das Rechteck über der ersten Sehne zu einem Rechteck über dem Durchmesser und scheren dieses dann weiter zu dem Rechteck über der zweiten Sehne.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die Sehne AB gleichzeitig der Durchmesser unseres Kreises. Über die „Sehnen" AB und CD konstruieren wir die Rechtecke $APKL$ und $PUVC$ s.d. $|PB| = |PK| = q$ und $|PD| = |PU| = r$, d.h. $Fl_{APKL} = p \cdot q$ und $Fl_{PUVC} = r \cdot s$. Zu zeigen: $Fl_{APKL} = Fl_{PUVC}$.

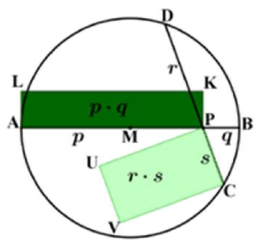


Abbildung 25: Visualisierung der Produkte als Flächeninhalt von Rechtecken

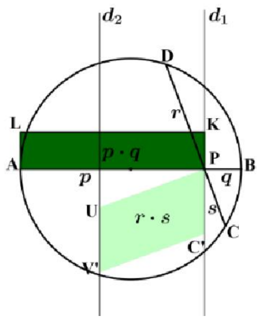


Abbildung 26: Durch Scherung erhalten wir das flächengleiche Parallelogramm $PUV'C'$.

Der Kreis $C(P,q)$ schneide die Strecke PC' in K'. Durch eine weitere Scherung erhalten wir, dass $Fl_{PKTN} = Fl_{PUT'K'}$ (Abb. 27).
Es bleibt noch zu zeigen, dass $Fl_{ANTL} = Fl_{V'C'K'T'}$.
Da $Fl_{ANTL} = Fl_{L'T'UA'}$, müssen wir die Flächengleichheit der Parallelogramme $L'T'UA'$ und $V'C'K'T'$ beweisen.

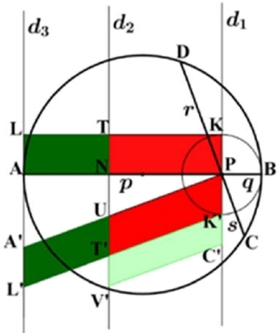


Abbildung 27: Zerlegung des Rechtecks und Scherung der Teile

Wir betrachten dafür das Parallelogramm $PA'EC'$. Sollte der Punkt T' auf der Diagonalen PE liegen, so wäre $Fl_{L'T'UA'} = Fl_{V'C'K'T'}$.

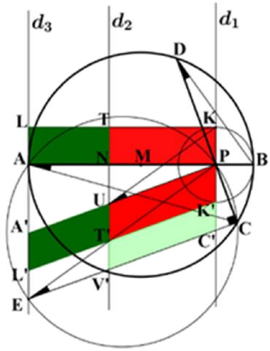


Abbildung 28: Nachweis der Flächengleichheit durch Gnomon

Da $PA \perp d_3 \Rightarrow m(\widehat{EAP}) = 90°$ (1)

Laut Konstruktion ist $A'P \perp DC$ und $A'P \parallel EC \Rightarrow EC \perp DC \Rightarrow m(\widehat{PCE}) = 90°$ (2)

Aus (1) und (2) $\Rightarrow m(\widehat{EAP}) + m(\widehat{PCE}) = 180° \Rightarrow AECP$ Sehnenviereck $\Rightarrow$
$m(\widehat{CAP}) = m(\widehat{CEP})$ (Umfangswinkelsatz) (3)

$ACBD$ Sehnenviereck $\Rightarrow m(\widehat{CAP}) = m(\widehat{PDB})$ (Umfangswinkelsatz) (4)

Laut Konstruktion ist $\Delta BPD \equiv \Delta KPU$ $(S.W.S.) \Rightarrow m(\widehat{PDB}) = m(\widehat{PUK})$ (5)

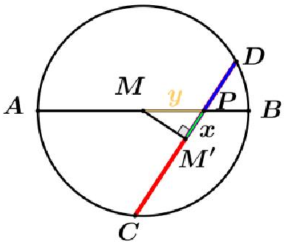
Aus (3), (4) und (5) folgt, dass $m(\widehat{PUK}) = m(\widehat{CEP}) \Rightarrow UK \parallel EP$ (6)

Da $|KP| = |UT'|$ und $KP \parallel UT' \Rightarrow KUT'P$ ist ein Parallelogramm,

d.h. $UK \parallel T'P$ (7)

Aus (6) und (7) folgt, dass $T' \in PE \Rightarrow Fl_{L'T'UA'} = Fl_{V'C'K'T'}$.

Als nächstes zeigen wir einen Beweis, der die Idee der Herleitung des Satzes des Pythagoras aus dem Sehnensatz nutzt (Absatz 5.3), wir nennen ihn den algebraischen Beweis mithilfe des Satzes des Pythagoras (Abb. 29).



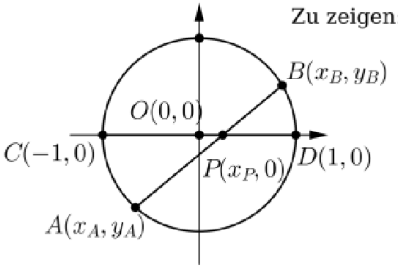
$$|CP| \cdot |PD| = (|DM'| + x) \cdot (|DM'| - x) = |DM'|^2 - x^2 = |DM|^2 - |MM'|^2 - (y^2 - |MM'|^2) = |AM|^2 - y^2 = (|AM| + y) \cdot (|AM| - y) = |AP| \cdot |PB|$$

Abbildung 29: Algebraischer Beweis mithilfe des Satzes des Pythagoras

Der nächste Beweis entspricht den derzeitig am häufigsten trainierten Fertigkeiten der meisten Schüler und Studierenden – er benutzt das Arbeiten in Kartesischen Koordinaten.

Wie in der analytischen Geometrie üblich, wählen wir uns ein Koordinatensystem, in welchem sich die geometrischen Verhältnisse besonders gut darstellen lassen und zu einfachen algebraischen Gleichungen führen. Auch hier können wir wieder den Durchmesser als eine der beiden Seiten annehmen (die Argumentation ist die gleiche wie beim Scherungsbeweis). Wir wählen den Ursprung als Mittelpunkt des Kreises und wählen die Sehne, welche den Durchmesser bildet, auf der x-Achse.

Der Beweis erfolgt durch die Koordinatisierung des Kreises und der Sehnenschnittpunkte durch Gleichungen (Abb. 30). Der Beweis der Gleichheit der Produkte wird durch Nutzung der Kreisgleichung und des algebraischen Ausdrucks der Ähnlichkeit der Steigungsdreiecke geführt.



Zu zeigen: $$\sqrt{(x_B - x_P)^2 + y_B^2} \cdot \sqrt{(x_A - x_P)^2 + y_A^2} = \sqrt{(1 - x_P)^2} \cdot \sqrt{(x_P + 1)^2}$$

Unter der Voraussetzung, dass

$$x_A^2 + y_A^2 = 1, \; x_B^2 + y_B^2 = 1$$

und

$$\frac{|y_B|}{|y_A|} = \frac{|x_B - x_P|}{|x_A - x_P|}$$

Abbildung 30: Beweis mithilfe der analytischen Geometrie durch Koordinatisierung

Den letzten Beweis haben wir bei Heinrich Bubeck (Bubeck 1994) gefunden und möchten ihn hier um seiner Eleganz willen anführen. Er vereinigt viele Aspekte in sich und ermöglicht auch ein konstruktives Verständnis der im Lehrbuch Neue Wege zu findenden Visualisierung durch Flächen. Der Beweis benutzt die dritte Dimension und den leicht einzusehenden Fakt, dass der Schnitt einer Ebene mit einer Kugel einen Kreis ergibt.

Gegeben seien eine Kugel und eine Ebene, welche sie im Äquator schneidet und einen Großkreis erzeugt (Abb. 31). In diesem Kreis seien zwei sich schneidende Sehnen gegeben. Wir können jede dieser Sehnen als Stück einer Schnittgeraden unserer ersten Ebene und einer zu ihr orthogonalen Ebene betrachten. Jede der orthogonalen Ebenen schneidet auch unsere Kugel und erzeugt je einen Kreis. Diese Kreise sind unterschiedlich groß, unsere Sehnen bilden die Durchmesser der beiden Kreise. Die unabhängige Anwendung des Höhensatzes bzgl. der Sehnenabschnitte in den beiden orthogonalen Kreisen führt zum Quadrat der gleichen Höhe - dem Abstand des Schnittpunkts der Sehnen vom Schnittpunkt der orthogonalen Kreise.

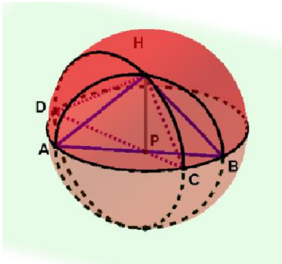


Abbildung 31: Beweis mithilfe des Höhensatzes in der dritten Dimension

7 Resümee

Mathematikdidaktische Lehrbücher können aus einer methodischen Perspektive geschrieben werden: Theorien zur Begriffsentwicklung, dem Problemlösen und Beweisen werden vorgestellt und im Anschluss werden Klassifikationen durch Beispiele illustriert. Dies ist eine auch in der Pädagogik übliche Herangehensweise.

Wir sind einen anderen Weg gegangen: Ausgehend von einem mathematischen Inhalt und der mathematischen Auseinandersetzung mit relevanten Sachverhalten, Beispielen und Anwendungen diskutierten wir verschiedene Möglichkeiten der Kontextualisierung und konzeptuellen Entwicklung. Dabei traten Begriffsentwicklung, Problemlösen und Beweisen nicht als verschiedene didaktische Theorien auf, sondern initiierten unterschiedliche Auseinandersetzungen mit einem mathematischen Inhalt. Die fachdidaktische Entwicklung des elementargeometrischen Themas setzte bei der Formulierung, der Lösungsskizze und dem Beweis des Sehnensatzes in einem Schulbuch an. Gegenstand der curricularen, mathematischen und methodischen Betrachtungen waren Fragestellungen, die sich ein Lehrender bei der Auseinandersetzung mit der Schulbuchdarstellung stellen könnte, sowie didaktische Einordnungen dieser Fragestellungen.

Möglichkeiten zum entdeckenden Lernen Studierender sind u.a. beim eigenständigen Erkunden verschiedener möglicher Antworten auf die Frage: Warum möchte und Wie kann ich den Sehnensatz lehren? und dem Entdecken ihrer eigenen Vorlieben gegeben.

Der von uns gewählte geometrische Inhalt zur Gestaltung kanonischer Themen fachdidaktischer Veranstaltungen kann natürlich variiert werden. Wir haben die Ähnlichkeitssätze am Kreis gewählt, weil sie sehr nah an der Satzgruppe des Pythagoras liegen und trotzdem zu Einsichten führen, die außerhalb rechtwinkliger

Denkweisen liegen. Der geometrische Inhalt ist uns, wie Schupp schreibt *Mittel zum Zweck* (Schupp 2014).

Literatur

Abbott, A. E. (2006): Flatland - A Romance of Many Dimensions, Oxford University Press, New York.

Artigue, M., Assude, T., Grugeon, B., Lenfant, A.(2001): Teaching and learning algebra, approaching complexity through complementary perspectives. The Future of the teaching and learning of algebra (Proceedings of the 12 ICMI Study Conference), pp. 21-32, Melbourne.

Artmann, B. (1999): Euclid-the creation of mathematics, Princeton University Press,

Artmann, B., Kroll W., Pickert G. (2003): Eine Verallgemeinerung des Kathetensatzes von Euklid, PM3/45.

Baptist, P. (1996): Der Satz des Pythagoras-eine qualitas occulta, Der Mathematikunterricht Heft 3, S.32.

Barbin, E. (2000): The Historicity of the Notion of What is Obvious in Geometry. In Katz, V. (2000): Using history to teach Mathematics. (S.89-99), MAA Notes #51.

Bender, P. (1982): Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion, ZdM, Heft 1

Bubeck, H. (1994): Ein räumlicher Beweis des Sehnensatzes. In: PM 6/36, 254-255.

Douady, R. (1997): Didactic engineering. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), Learning and teaching mathematics:An International Perspective, 373-400, Psychology Press

Fehr, H. F. (1966): Secondary School Mathematics Curriculum Improvement Study. *The* American Mathematical Monthly 73 (5): 533.

Fried, M. N. (2001): Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? Science & Education, 10, 2001, 391-408.

Führer, L. (2004): Verhältnisse. Plädoyer für eine Renaissance des Proportionsdenkens. Mathematik Lehren, (123), 46–51.

Haftendorn, D. (2010): Mathematik sehen und verstehen: Schlüssel zur Welt. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Indiogine, S. E., & Kulm, G. (2009): Comparing the first mathematics textbook with a modern one: How some famous geometry theorems have been illustrated over time, The 32rd Annual Meeting of the Society for the Study of Curriculum History, April 12-13, San Diego, CA

Jahnke, H. N. (1991): Mathematik historisch verstehen - oder: Haben die alten Griechen quadratische Gleichungen gelöst? mathematik lehren 47, S. 6-12.

Karp, A., Schubring, G. (2014): Handbook on the History of Mathematics Education. Imprint: Springer, S. 248-249.

Nickel, G. (2013): Vom Nutzen und Nachteil der Mathematikgeschichte für das Lehramtsstudium, GDM-Mitteilungen 95

Lergenmüller, A. / Schmidt, G. (2011): Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien, Jahrgangsstufe 9. Braunschweig: Schroedel.

Müller-Sommer, H. (2004): Variationen zum Satz des Pythagoras, *Mathematikunterricht* 50.4, S.57-65.

Peters, W.S. (1985): Konstruierbarkeit als Beweiskriterium und als didaktisches Prinzip, MU1.

Polya, G. (1969): Mathematik und plausibles Schließen. Bd. I. Induktion und Analogie in der Mathematik, Birkhäuser Verlag Basel,

Reidt, Wolff, Athen: Elemente der Mathematik (Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Lehranstalten), Schroedel, Schöningh, 1972, S.172-288

Schupp, H.(2002): Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht, Hildesheim, Franzbecker,

Schupp, H. (2014): Zwischenruf: „Stoff"didaktik?, GDM-Mitteilungen 97, S.38

Specht, E., & Strich, R. (2001) geometria–scientiae atlantis, Otto-von-Guericke-Universität, Magdeburg.

Steinbring, H. (1986): Ähnlichkeit, in Gerd von Harten [u.a.]: Funktionsbegriff und funktionales Denken, Köln: Aulis-Verl. Deubner, S. 85-130.

Toeplitz, O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen, Jahresbericht der DMV Band 36, S. 88-100.

Schönbeck, J. (2003). *Euklid: um 300 v. Chr*. Birkhäuser.

Thaer, C. (1991): Die Elemente. Buch I-XIII. 8. Aufl. Darmstadt:Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Weiss-Pidstrygach, Y. (2011): Begriffsbildung mit tätigkeitstheoretischen Methoden. Beiträge zum Mathematikunterricht, Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.

Weiss-Pidstrygach, Y. (2012): Instruktion, Konstruktion und die Zone der nächsten Entwicklung. Beiträge zum Mathematikunterricht,

Weiss-Pidstrygach, Y., Kvasz, L., Kaenders, R. (2013): Geschichte der Mathematik als Inspiration zur Unterrichtsgestaltung." in Helmerich, M., Mathematik im Prozess-Philosophische, historische und didaktische Perspektiven, Wiesbaden, Springer Spektrum, S. 291-303.

Weiss-Pidstrygach, Y. (2014): Umfängliches und Diametrales. In Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen (S. 41-61). Springer Fachmedien Wiesbaden.

Winter, H. (1991): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht, 2. Auflage,Vieweg, S.1.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Ysette Weiss-Pidstrygach
Universität Mainz, Institut für Mathematik
55099 Mainz
e-Mail: weisspid@uni-mainz.de

Dr. Emese Vargyas
Universität Mainz, Institut für Mathematik
55099 Mainz
e-Mail: vargyas@uni-mainz.de