RAINER KAENDERS & YSETTE WEISS-PIDSTRYGACH

Skalen und Nomogramme

1 Einleitung

Schüler in deutschen Schulen lernen nun spätestens seit dem PISA-Schock im Jahr 2003 fleißig Zuordnungen bei so genannten Füllgraphen über Mustererkennung vorzunehmen: Welcher Graph gehört zum Füllgraphen der angegebenen Weinkaraffe?

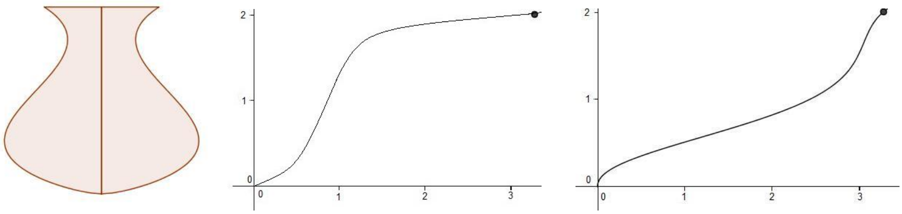


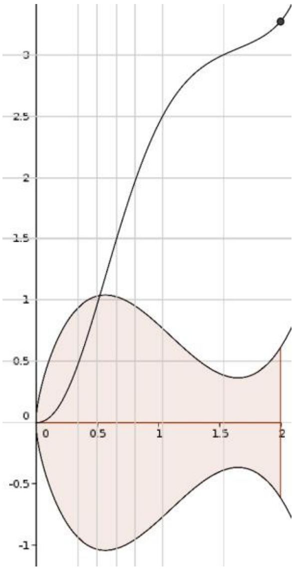
Abb. 1: Eine Weinkaraffe[i] und zwei denkbare Füllgraphen.

Intensive Bemühungen unsere Schüler beim Abtesten der Beherrschung dieser Aufgabentypen besser abschneiden zu lassen, haben zu einer unerwarteten Aufwertung dieses nicht authentischen und realitätsfernen sehr speziellen Beispiels geführt. Die Zuordnungen zwischen einfachen Behältern und Füllgraphen (Kompetenzstufe 2) und Behältern und Füllgraphen (Kompetenzstufe 3) gelten nun als messbarer Ausdruck des kompetenten Umgangs mit funktionalen Zusammenhängen. Die Beherrschung dieser speziellen Zuordnung wird eigens aufgeführt und ist nicht Teil der scheinbar allgemeineren Kompetenz (Kompetenzstufe 3, Leitidee Funktionaler Zusammenhang): graphisch/verbal dargestellte überschaubare funktionale Zusammenhänge den passenden realen Kontexten zuordnen (KMK, 2008, S. 38).

Da dieses bildungspolitisch erfolgreiche Beispiel messbaren Verständnisses funktionaler Zusammenhänge doch sehr isoliert unter allgemeinen Darstellungswechseln steht, fragen wir uns: Müsste man dann nicht auch darüber nachdenken, weitere konkrete den Alltag abbildende Zuordnungen aufzunehmen: Die Zuordnung Türklinke – Winkelscheibe z.B. verbindet ein Objekt täglicher Handhabung mit einem anderen nützlichen mathematischen Werkzeug. Auf der Tätigkeitsebene wären Besteckkasten – Schubladenprinzip oder Brotschneiden – Zerlegungsgleichheit mögliche Kandidaten. Die für die *mathematical literacy* nicht zu unterschätzende Bedeutung des Zusammenhangs von *Zeit* und *Kniebeugewinkel* beim Gehen ist ja sehr wohl von der PISA community erkannt worden (Jablonka, 2007, S. 255).

Füllgefäße und Füllgraphen sind nun Teil der Lehrbuchinhalte, Klassenarbeiten, Ländervergleichstests und somit des Schulalltags und der Bildungspolitik. Sofern sie es noch nicht waren, sind die Füllgraphen damit auch zu einem vielgefragten Gegenstand mathematikdidaktischer Forschung geworden. Und in der Tat können Füllgraphen auch tatsächlich ein interessantes Beispiel zur Illustration mathematikdidaktischer Theorien und Ansätze sein, wie Anselm Lambert (2013) durch die methodische vielseitige Entwicklung des Darstellungswechsels und der beteiligten Objekte zeigt.

Wir wollen uns im Folgenden der Zuordnung Gefäßform → Funktionsgraph aus der Perspektive mathematischer Werkzeuge nähern, nämlich über Skalen und Nomogramme. Ausgehend von der Formalisierung der angewandten Methoden skizzieren wir einige mögliche stoffdidaktische Entwicklungen, die ein anderes Licht auf diesen Darstellungswechsel und den zugrunde liegenden funktionalen Zusammenhang gestatten. Poetischer gesagt: Wir gießen das Füllhorn der Skalen und der Nomographie über die Füllgraphen aus.



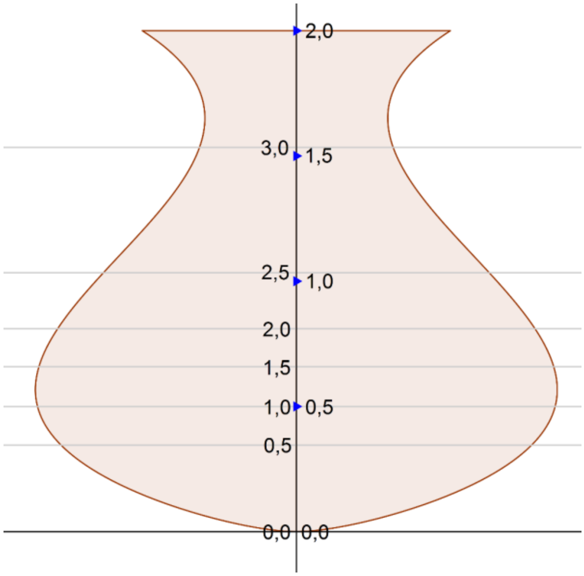


Abb. 2: Erstellen einer Skala aus dem Füllgraphen (links) und eine Weinkaraffe als Messbecher (rechts)

1.1 Füllgraphen als Problemlösemethode

Viele Studierende des Lehramts sind aus der eigenen Schulzeit mit der Zuordnung der Form eines Gefäßes zu einem Funktionsgraphen (und vice versa) vertraut und lösen die Aufgaben mühelos durch Mustererkennung: Merkmale des Gefäßes wie zylindrisch, kegelförmig, verengend werden Merkmalen des Funktionsgraphen zugeordnet. Wie nicht anders zu erwarten – siehe z.B. (Brown et al., 1989) – beobachten wir, dass diese Fertigkeiten einem möglichen Wechsel der Perspektive nicht standhalten. Ersetzt man die Bezugsvariable *Zeit* durch eine andere Größe, so treten sogar schon im Fall proportionaler Abhängigkeit – wie *Füllmenge* statt *Zeit* – Probleme auf. Auch bei Änderungen der Problemstellung bzgl. der Fließgeschwindigkeit, konnten wir wiederholt in Seminaren beobachten, dass bei einer Veränderung der Aufgabenstellung die Problemlösemethode nicht variiert werden kann. Aus der Perspektive der Entwicklung der Tätigkeit *Musterübertragung* bedarf es eines neuen Kontextes, der eine Konzeptualisierung der operationalisierten Mustererkennung *Gefäßform – Funktionsgraph* ermöglicht (Weiss-Pidstrygach, 2011).

Vom praktischen Standpunkt ist die viel interessantere Frage ja die folgende:

Angenommen, wir wollen die Vase als Messbecher benutzen. Auf welchen Höhen müssen *wir die den verschiedenen Volumen entsprechende Markierungen anbringen?*

Ist das Gefäß symmetrisch, so kann das halbe Volumen durch das Kippen des Gefäßes ermittelt werden. Unsere Bezugseinheit wäre hier das Gefäßvolumen. Das Auffüllen des Gefäßes mithilfe eines kleineren Gefäßes würde zu Einheiten führen, die durch unser Schöpfmaß bestimmt sind. Nutzt man den Füllgraphen einer typischen Füllgraphenaufgabe zum Ablesen der entsprechenden Markierungen, so würde man das Messgefäß in Sekunden ausmessen. Kartesische Koordinaten eignen sich wenig, um Verkettungen von Funktionen darzustellen. Demzufolge bestände eine ausführliche graphische Lösung aus zwei Funktionsgraphen. Der erste Graph ist der Graph des linearen funktionalen Zusammenhangs Zeit – Volumen (bei konstanter Fließgeschwindigkeit) und der zweite Graph beschreibt den funktionalen Zusammenhang Volumen – Höhe.

Die Frage nach der Nutzung des Gefäßes als Messbecher führt zu einem alten Thema: *der Erstellung von Skalen*. In Abb. 2 sehen wir, wie der Füllgraph benutzt wird, eine solche Skala zu erzeugen. Dies ist ein einfaches Beispiel für eine Grafik, die zur Handhabung praktischer Fragen eingesetzt werden kann, indem Werte einfach abgelesen werden. Nun ist dabei jedoch der wesentliche graphische Zusammenhang in der Erstellung des Füllgraphen verborgen, der mit Hilfe von Integralrechnung erstellt wurde. Möchte man die Methode der Erstellung von Skalen durch Funktionsgraphen verstehen, lohnt es sich weitere und elementarere Beispiele funktionaler Zusammenhänge zu untersuchen. Das führt uns zur Nomographie.

2 Skalen

Skalen begegnen uns im Alltag viele. Wobei allerdings das Aufkommen der allgegenwärtigen Computertechnologie sie zusehends aus unserem Alltag verschwinden lässt. Ein Zahlenstrahl ist mit einem euklidischen Abstand versehen, der mit den Zahlen des Strahls verträglich ist. Unter einer *Skala* verstehen wir allgemein eine Zuordnung der Punkte eines Zahlenstrahls zu den Punkten eines anderen Zahlenstrahls, bei der die zugehörige Abbildung monoton sei. Häufig werden Skalen an einer einzigen Geraden visualisiert, indem Markierungen auf zwei Seiten der Geraden angebracht werden. Die Zuordnung kann so bei speziellen Werten des Zahlenstrahls abgelesen werden, indem ihnen die jeweils gegenüberliegende Zahl zugeordnet wird.

2.1 Lineare Skalen

Bei einem kartesischen Koordinatensystem werden die Zuordnungen durch den Funktionsgraphen getroffen, der die senkrecht zueinander stehenden Zahlenstrahlen in Beziehung setzt. Eine andere Möglichkeit ist die folgende: Die Zahlenstrahlen kann man auch parallel zueinander positionieren und einen von ihnen mit äquidistanten Markierungen versehen. Verbindet man nun je ein x, das zu einer dieser Markierungen auf dem einen Zahlenstrahl gehört, mit dem zugehörigen y auf dem anderen Zahlenstrahl durch einen Pfeil, dann erhalten wir ein Nomogramm[ii]. In (Kaenders, 2014) werden solche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge durch Pfeile zwischen parallelen Skalen (Nomogramme) genutzt, um an kartesische Koordinaten gebundene Denkgewohnheiten zu verändern. Durch diese andersartige Darstellung der Eigenschaften von Funktionen werden neue Sichtweisen auf Problemstellungen und neue Lösungswege möglich.

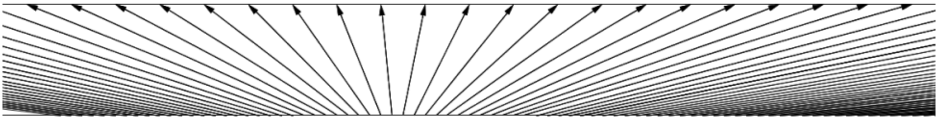


Abb. 3: Das Nomogramm einer linearen Abbildung. Die verlängerten Pfeile verlaufen alle durch einen Punkt.

Es gibt einfache Skalen wie die proportionalen Umrechnungsskalen von verschiedenen Längenmaßen, Währungen, Dreikant-Maßstäbe oder die lineare Umrechnungsskala von Grad Celsius in Fahrenheit. Die Zuordnungen solcher einfacher Skalen sind in der Regel bestimmt durch lineare Funktionen $y = mx + b$. Das Kennzeichen einer solchen Zuordnung ist bei einem Nomogramm mit zwei parallelen Zahlenstrahlen, dass alle Pfeile in Verlängerung genau durch einen Punkt, das *Zentrum* der linearen Abbildung, verlaufen. Eine lineare Zuordnung wird im Nomogramm also durch ein Geradenbündel charakterisiert. Dies beweist man mit der Ähnlichkeit von Dreiecken – genau wie beim Beweis der Tatsache, dass die kartesischen Graphen linearer Funktionen Geraden sind. Es ist eine einfache Übung.
Aufgabe: Gegeben sei eine Zuordnung durch $y = mx + b$ für feste Zahlen m und b. Beweisen Sie, dass bei einem Nomogramm mit zwei parallelen Zahlenstrahlen immer die Pfeile in Verlängerung genau durch einen Punkt verlaufen.

2.2 Projektive Skalen

Schauen wir perspektivisch auf ein einfaches Zentimeter-Maßband, so verändert sich dieses. Messen wir diese Veränderung auf der Abbildung wiederum mit einem Zentimeter-Maßband, so finden wir eine *projektive Skala*.

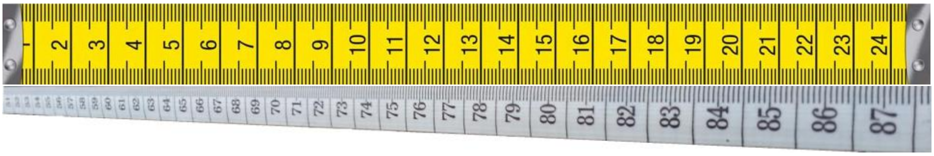


Abb. 4: Eine Zentimeterskala perspektivisch gesehen und wieder vermessen.

Den Schlüssel zu dieser Skala formen so genannte *homogene Koordinaten*. Wir betrachten dazu die Zentralprojektion von einem Punkt O aus von einer Geraden auf eine andere.

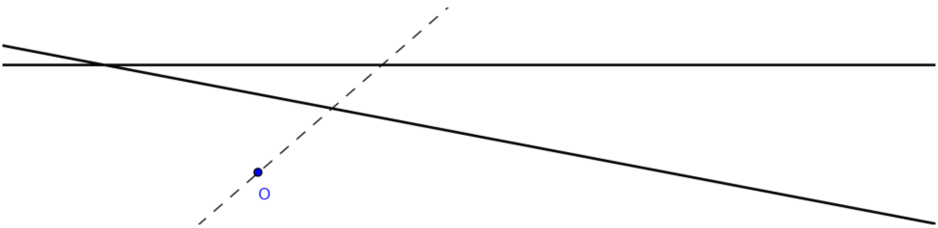


Abb. 5: Zentralprojektion von einem Punkt O aus von einer Geraden auf eine andere.

Zunächst verwenden wir ein sehr einfaches und dieser Situation angepasstes Koordinatensystem. Dazu konstruieren wir zu den beiden Geraden die Parallelen durch den Punkt O. Diese Formen ein (evtl. schräges) Koordinatensystem mit Koordinaten $(u|v)$, wenn wir auf ihnen die Koordinaten äquidistant wählen, so dass jeweils die 0 auf dem Punkt O und die 1 auf den Schnittpunkten A und B der Koordinatenachsen mit den ursprünglichen Geraden liegen. Dieses Koordinatensystem induziert auch einen Maßstab auf den ursprünglichen Geraden über Parallelverschiebung mit den Koordinaten u bzw. v, deren Nullpunkte sich jeweils bei A und B befinden und deren Koordinaten $u = 1$ und $v = 1$ jeweils auf dem Schnittpunkt der beiden Geraden $C = (1|1)$ liegen.

Nun wollen wir zunächst die Projektion bezüglich dieser speziellen Koordinaten auf den ursprünglichen Geraden betrachten. Ein Punkt $P(u|1)$ mit Koordinate u auf der ersten der beiden Geraden wird auf einen Punkt $Q(1|v)$ mit Koordinate v auf der zweiten Geraden abgebildet. Da in den gewählten Koordinaten auf den ursprünglichen Geraden die Strecken BC und AC Einheiten sind, gilt $u = \frac{BP}{BC}$ und $v = \frac{AQ}{AC}$. Nach zweimaliger Anwendung des Strahlensatzes bei beiden Paaren paralleler Geraden: $AQ: AC = OQ: OP = BC: BP$ oder $v: 1 = 1: u$. Damit hat die Abbildung von dem einen Zahlenstrahl auf den anderen die Gestalt $v = \frac{1}{u}$.

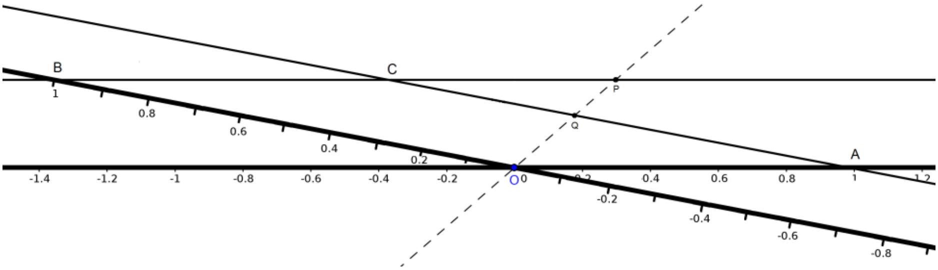


Abb. 6: Zentralprojektion von einem Punkt O aus von einer Geraden auf eine andere mit angepassten Koordinaten.

Verändern wir nun die Koordinaten auf den beiden Geraden durch lineare Umskalierung zu Koordinaten $u = cx + d$ und $y = mv + n$ mit $c, m \neq 0$, so sehen wir, dass eine allgemeine solche Abbildung die Form annimmt $y = m\left(\frac{1}{cx+d}\right) + n = \frac{ncx+(m+nd)}{cx+d} = \frac{ax+b}{cx+d}$ für reelle Zahlen $a = nc$ und $b = m + nd$. Damit wird die allgemeine Form für die Zentralprojektion eines Zahlenstrahls in der Ebene auf einen nicht parallelen anderen gegeben durch $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ für Zahlen a, b, c, d mit $c \neq 0$. Der Fall $c = 0$ ist eine lineare Transformation, wie sie oben beschrieben wurde.

Aufgabe: Berechnen Sie a, b, c, d für die projektive Transformation in Abb. 4.

Bemerkung: Schauen wir beispielsweise auf ein Foto einer geradlinigen Allee mit regelmäßig gepflanzten Bäumen, dann können wir die Bäume als Zahlenstrahl auffassen und mit einem Lineal die Position der Bäume auf dem Foto vermessen. Die oben abgeleitete Formel widerlegt die weit verbreitete Vorstellung, dass die regelmäßig gepflanzten Bäume einer Allee auf einer perspektivischen Abbildung eine geometrische Reihe formen würden.

2.3 Logarithmische Skalen

Wohl zu den traditionell wichtigsten Skalen gehören die *logarithmischen*. Hier wählen wir eine äquidistante Einteilung des Zahlenstrahls, bei denen wir die Markierungen mit Zahlen versehen, so dass wir von der Zahl einer Markierung zur Zahl an der nächsten Markierung durch Multiplikation mit stets demselben von 1 verschiedenen Faktor gelangen.

Interessant sind hier Funktionsdarstellungen, bei denen entweder die Ordinate oder aber sowohl die Ordinate als auch die Abszisse logarithmisch dargestellt werden. Im ersten Fall sprechen wir von *einfachlogarithmischen* und im zweiten Fall von *doppeltlogarithmischen* Funktionsdarstellungen.

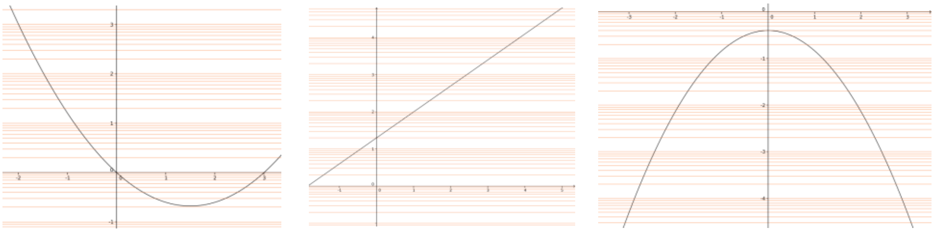


Abb. 7: Einfachlogarithmische Darstellung von: $f(x) = 2^{x(x-3)}$ sowie $f(x) = 20 \cdot 5^x$ und $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$ (v.l.n.r.)

Solche einfachlogarithmischen Darstellungen bieten eine wunderbare Gelegenheit zum entdeckenden Lernen. Welche Funktionen werden etwa durch Geraden, Parabeln oder andere einfache Kurven dargestellt? Dies wurde von Kindt (2002) didaktisch ausgearbeitet.

Und natürlich haben sich die logarithmischen Skalen durch die Verwendung von Rechenschiebern legitimiert, mit deren Hilfe Multiplikationen von Zahlen durchgeführt werden können. Hierzu gibt es sehr umfangreiche Literatur (siehe etwa (Prinz, 2013)).

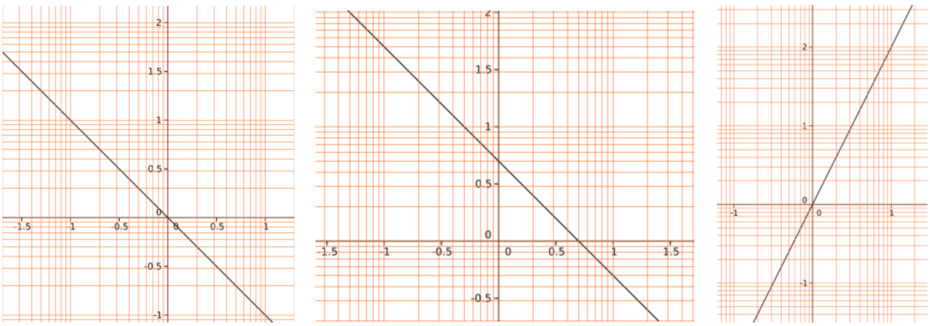


Abb. 8: Doppeltlogarithmische Darstellung von: $f(x) = \frac{1}{x}$ sowie $f(x) = \frac{5}{x}$ und $f(x) = x^2$ (v.l.n.r.)

2.4 Allgemeine Skalen

Der oben beschriebene Messbecher ist ein Beispiel unter vielen für eine allgemeine Skala. Andere Beispiele sind die Zeitangaben bei Wanderwegen, die jeweils die noch benötigte Zeit zum Ziel angeben oder die über Jahre angebrachten Kerben und Größenangaben eines Kindes am Türpfosten der elterlichen Wohnung. Bei all diesen Skalen kann man die beiden beteiligten Größen von zwei Seiten vermessen. Bei der Vase etwa können wir einerseits mit einem Messbecher wiederholt bestimmte feste Flüssigkeitsmengen einfüllen und dem entsprechend eine Skala auf der Vase erstellen. Man kann sich aber auch fragen, wann die Vase halb-, viertel-, dreiviertel- oder ganz voll ist. In ersterem Fall bestimmt das Maß die Einteilung auf der Vase und im zweiten Fall bestimmt die Vase das Maß zu ihrer Erfassung. Hier sehen wir, dass wir bei zwei messbaren Größen eine Skala mit einer Zuordnung in eine Richtung eine zweite Skala mit einer Zuordnung in eine andere Richtung finden. Auch, wenn die Zuordnungen invers zueinander sind, handelt es sich doch um verschiedene Skalen. Schon bei einer linearen Skala ist der Unterschied leicht zu sehen. In den Niederlanden wird der Kraftstoffverbrauch bei einem Kraftfahrzeug beispielsweise angegeben als *einer auf fünfzehn* oder 1:15, was bedeutet: Ein Liter Kraftstoff auf 15 km. In Deutschland lautet die entsprechende Angabe: $6\frac{2}{3}$ *auf Hundert*, d.h. $6\frac{2}{3}$ Liter auf hundert Kilometer.

3 Nomogramme

Vom Ende des 19. Jahrhunderts bis zum Aufkommen des Computers waren die Nomogramme eine sehr wichtige Rechenhilfe. Sie hingen in Ingenieurbüros und waren auf alle möglichen speziellen Kontexte hin angepasst. Dies erlaubte den Ingenieuren die Lösung sehr komplexer Rechnungen mit dem Lineal abzulesen. Kurzum, die Nomographie war von großer Wichtigkeit für die Ingenieurwissenschaften und man sprach bei einem Nomogramm auch von *Rechentafel* (*abaque*), was in Frankreich auch heute noch für solche Diagramme gebraucht wird. Dies zeigt, wie sehr es sich hier um ein *Rechen*instrument gehandelt hat. Eines der wichtigsten Werke zur Nomographie stammte von d'Ocagne (1891), dessen wesentliche Ideen später inhaltlich von Schilling (1900) ins Deutsche übertragen wurden. D'Ocagne (loc.cit, S. 6) war es auch, der das Wort *Nomogramm* eingeführt hat und die entsprechende Wissenschaft *Nomographie* nannte.

3.1 Nomogramme für Addition und Multiplikation

Eine wesentliche Idee in der Nomographie besteht darin verschiedene Koordinatensysteme in eine planare Grafik zu legen. Diese Idee wird M. Lalanne (siehe (d'Ocagne, 1891)) zugeschrieben, der hier vom *Prinzip der Anamorphose* sprach.

Betrachten wir dazu die einfache Formel für die Multiplikation: $\alpha \cdot \beta = \gamma$. Es gibt drei naheliegende Arten und Weisen Koordinaten α, β und γ in die Ebene zu legen, sodass die durch Multiplikation gestiftete Beziehung zwischen den Koordinaten ablesbar ist. In den drei Grafiken von Abb. 10 kann man eine der Koordinaten α, β und γ ablesen, wenn man die anderen beiden kennt. Dazu werden bestimmte Familien von Kurven (wie hier die Hyperbeln) *cotiert*, d.h. es wird an jede dieser Kurven eine Maßzahl (frz.: *cote*) geschrieben. Entlang einer solchen Linie bleibt der angedeutete Wert überall gleich, weshalb wir die Linien auch *Isolinien* (frz.: *isoplèthe*) nennen.

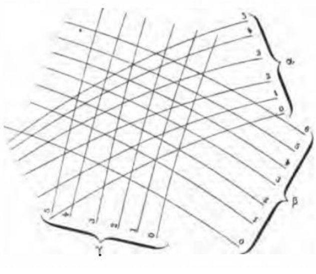


Abb. 9: Illustration eines allgemeinen Prinzips für Nomogramme in drei Variablen (aus (d'Ocagne, 1891)).

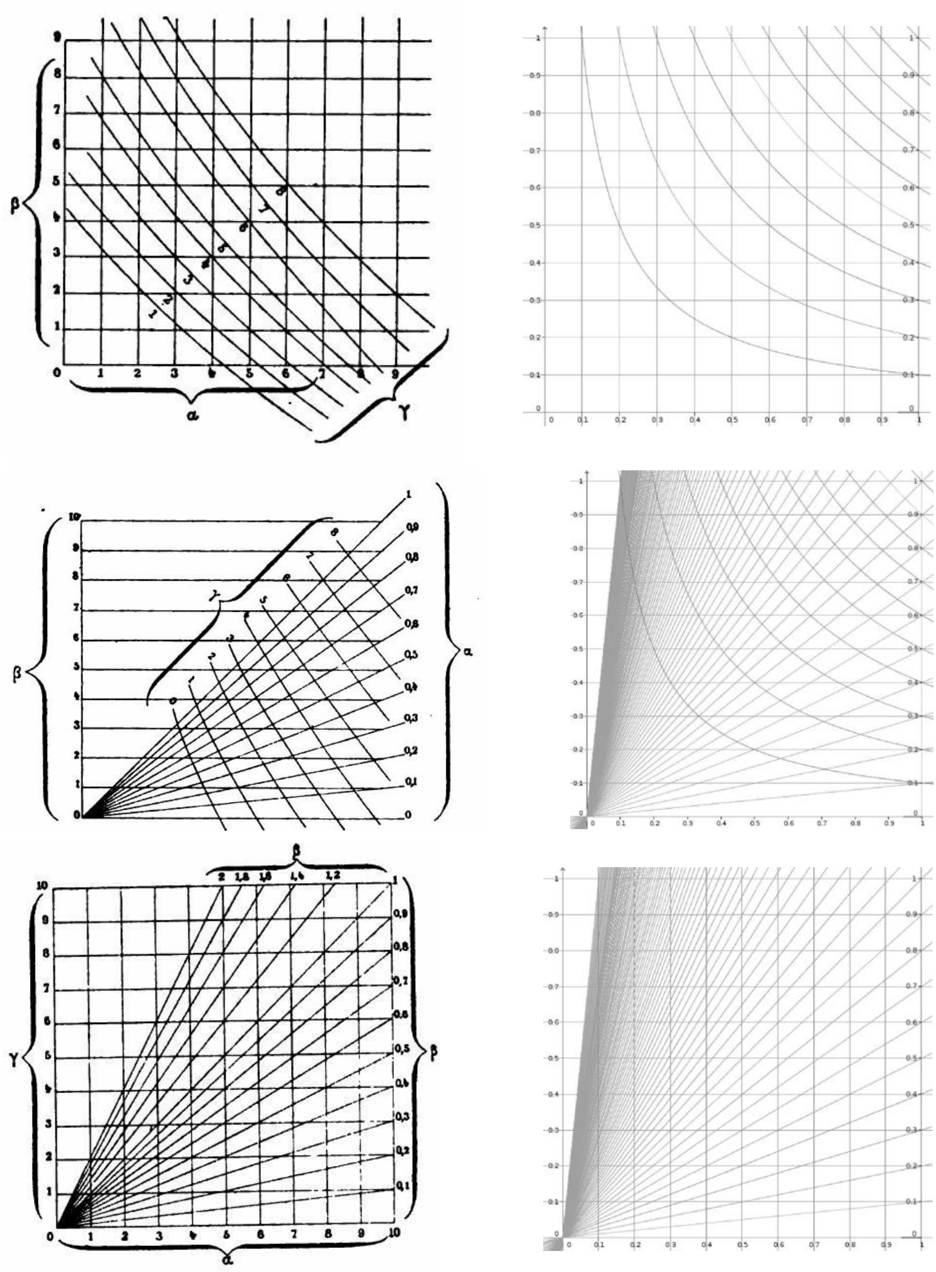


Abb. 10: Allgemeine schematische Illustration aus d'Ocagne (1891), rechts Nomogramme zur Multiplikation.

In Abb. 9 sehen wir schematisch, wie in einem allgemeinen Nomogramm je zwei der Variablen als Koordinaten aufgefasst werden können und der Wert der dritten Variablen darin abgelesen werden kann. Dabei werden jeweils Isolinien für festes α dann für festes γ und schließlich für festes β eingezeichnet. Hier sehen wir ein allgemeines Prinzip (siehe (Schilling, 1900) §3):

> Die Werte α, β und γ befriedigen die gegebene Gleichung, wenn die drei zugehörigen cotierten Kurven durch denselben Punkt gehen.

Schauen wir uns nun entsprechend die Addition an, so finden wir offensichtlich ähnliche Nomogramme. Betrachtet man das auf der Hand liegende Nomogramm, dann stellt man fest, dass wir die Summe zweier Zahlen x und y auf der Diagonalen eines kartesischen Koordinatensystems mit Lineal ablesen können (siehe Abb. 11). Doch benötigen wir hierfür ein zweites Lineal mit einem anderen Maßstab, der inkommensurabel zum ursprünglichen ist.

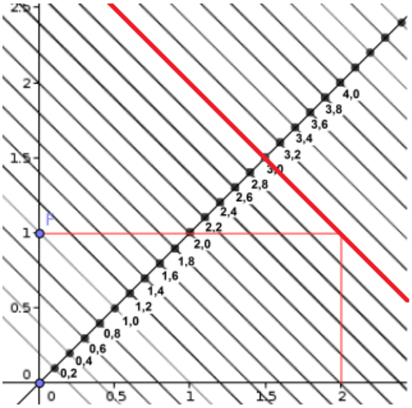


Abb. 11: Nomogramm zur Addition von x und y: Verfolge rote Linie vom Punkt (x,y) bis zur Diagonalen.

Hierauf hat der Bergbauingenieur (Lallemand, 1885, 1889) eine Antwort gefunden, indem er ein hexagonales Koordinatensystem einführte. Jetzt können wir die Summe gleich mit einem Lineal ermitteln. Wieder bilden wir den Punkt mit den Koordinaten (x, y) mithilfe der roten Linie auf die Diagonale ab, wo wir den Abstand vom Ursprung 0 als die Summe von x und y ermitteln.

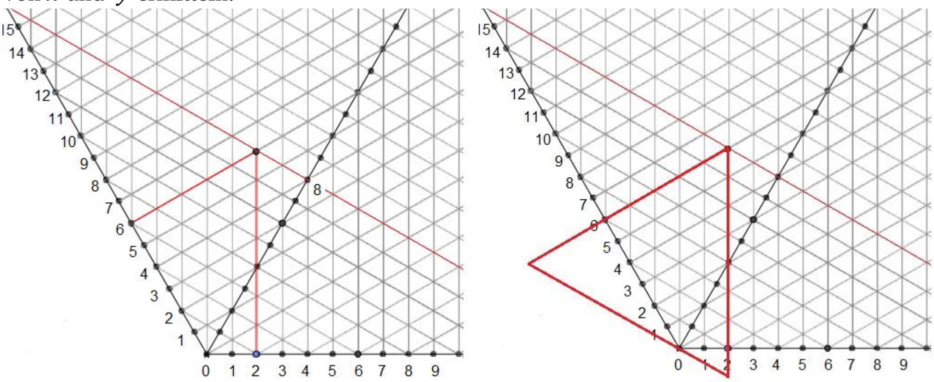


Abb. 12: Hexagonales Nomogramm zur Addition. Rechts: Verbindung zu Lotfußpunkten im gleichseitigen Dreieck.

Aufgabe: Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Viviani[iii], dass die oben beschrieben Vorschrift zur Addition die übliche Addition positiver Zahlen definiert.

Ersetzt man nun die äquidistanten Skalen durch logarithmische, so haben wir hiermit ein Werkzeug für die Multiplikation von Zahlen. Setzen wir umgekehrt-reziproke Skalen auf die äquidistanten Skalen, dann ermöglicht uns das zugehörige Nomogramm die Lösung der *Linsengleichung*, die bei einer optischen Abbildung mittels einer Linse die Beziehung zwischen Gegenstandsweite g, Bildweite b und Brennweite f angibt: $\frac{1}{b}+\frac{1}{g}=\frac{1}{f}$.

3.2 Nomogramme zur Lösung von Gleichungen

Mithilfe von Nomogrammen können Gleichungen gelöst werden. In (Kaenders, 2014) finden sich zwei Nomogramme zur Lösung quadratischer Gleichungen. Hier wollen wir eine Methode darstellen, die allgemeine Gleichung dritten Grade durch Nomogramme zu lösen. Auch diese Methode findet sich in (d'Ocagne, 1891).

Zunächst können wir jede allgemeine Gleichung der Form $ay^3+by^2+cy+d=0$ in eine äquivalente Gleichung der Form $y^3+py+q=0$ umformen. Dazu dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $a=1$ ist. Mit einer linearen Transformation, einer so genannten Tschirnhaus-Transformation, können wir nun dafür sorgen, dass der Koeffizient von y^2 gleich Null ist. Dazu substituieren wir $y=x-\frac{b}{3}$ in der Gleichung $y^3+by^2+cy+d=0$. Also:

$$x^3+px+q=0 \text{ mit } p=\frac{b^2}{3}+c \text{ und } q=-27b^3+d.$$

Wieder geht es hier um Perspektivwechsel. Wir fassen x als konstant und p und q als variabel auf. Jede kubische Gleichung kann also durch ein Paar reeller Zahlen $(p,\,q)$ repräsentiert werden. Somit verstehen wir die p-q-Ebene als die Ebene aller kubischen Gleichungen. Für ein festes x schauen wir uns nun diejenigen Gleichungen in der p-q-Ebene an, die x als Lösung haben. Diese erfüllen die Geradengleichung: $q=-xp-x^3$. In Abb. 13 sehen wir ein Nomogramm mit einer Familie solcher Geraden, die es uns erlaubt jede solche Gleichung zu lösen. Entlang einer der Geraden $q=-xp-x^3$ hat jede der Gleichungen dieselbe Lösung x. Wenn wir nun den Schnittpunkt (p_0,q_0) der Geraden mit der x-Achse betrachten, dann steht dieser Schnittpunkt für eine kubische Gleichung mit eben derselben Zahl x als Lösung. Nur bei dieser Gleichung ist $q_0=0$. Diese Gleichung hat also die Form $x^3+p_0x=0 \Leftrightarrow x(x^2+p_0)=0$. Somit ist die gesuchte Lösung $x=\pm\sqrt{-p_0}$.

Betrachten wir beispielsweise die Gleichung $x^3-19x+30=0$, d.h. den Punkt $(p,q)=(-19,30)$ in der p-q-Ebene. Durch diesen Punkt verlaufen drei der Geraden aus der oben beschriebenen Familie von Geraden, die in Abb. 13 rot eingezeichnet sind. Schauen wir uns die Schnittpunkte dieser Geraden mit der x-Achse an, dann sind deren Abszissen:

$$p_1=-25, p_2=-16, p_3=-4.$$

Damit ergeben sich die Lösungen $x_1=\sqrt{-p_1}=5,\ x_2=\sqrt{-p_2}=4,\ x_3=\sqrt{-p_3}=2.$

Nehmen wir bei linearen Funktionen nun nochmals den Standpunkt der Zuordnungen bei parallelen Zahlenstrahlen wie in Abschnitt 2.1 ein, dann sei die Variable p die Koordinate auf dem einen und q die auf dem anderen. Wir lösen die Gleichung $x^3+px+q=0$.

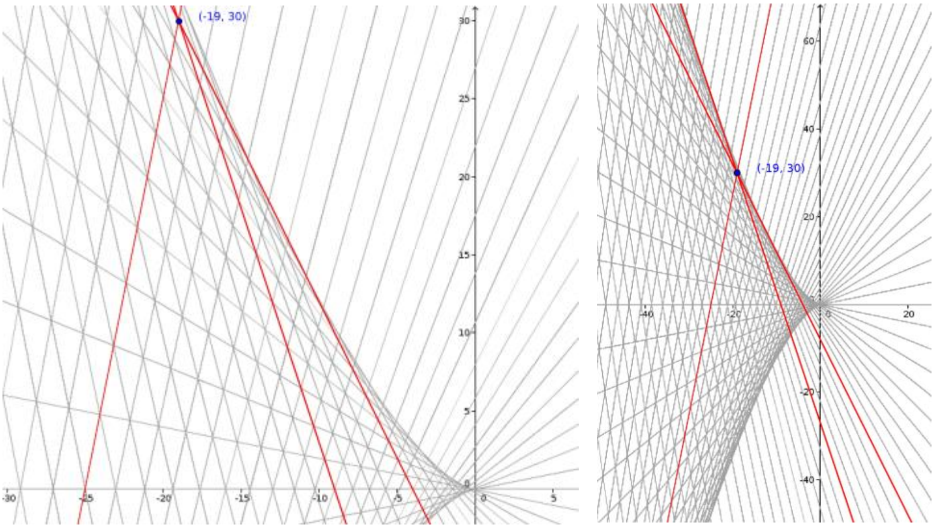


Abb. 13: Nomogramme zur Lösung kubischer Gleichungen. Beispiel $x^3 - 19x + 30 = 0$.

Für jedes x finden wir bei der linearen Zuordnung $q = -xp - x^3$ jeweils ihr Zentrum $Z(x)$ in der Ebene. Die Zuordnung $x \mapsto Z(x)$ definiert eine parametrisierte Kurve, wie sie in Abb. 14 abgebildet ist. Wir verbinden nun den Punkt mit Koordinate p auf dem einen Zahlenstrahl mit dem Punkt mit Koordinate q auf dem anderen. Diese Gerade schneidet die parametrisierte Kurve in so vielen Punkten, wie die Gleichung Lösungen hat. Wir wählen einen solchen Schnittpunkt P aus. Für jedes Paar p und q, für das die Verbindungsgerade durch P verläuft, ist x eine Lösung der Gleichung $x^3 + px + q = 0$. Ein solches Paar p und q wird nämlich durch die lineare Zuordnung $q = -xp - x^3$ für das feste x verbunden. Wählen wir nun die Gerade, die durch P und den Nullpunkt $q = 0$ auf dem q-Zahlenstrahl verläuft, so ergibt sich wie oben ein Schnittpunkt mit Koordinate $p = p_0$ mit dem p-Zahlenstrahl. Dann ist die gesuchte Zahl wieder $x = \pm\sqrt{-p_0}$.

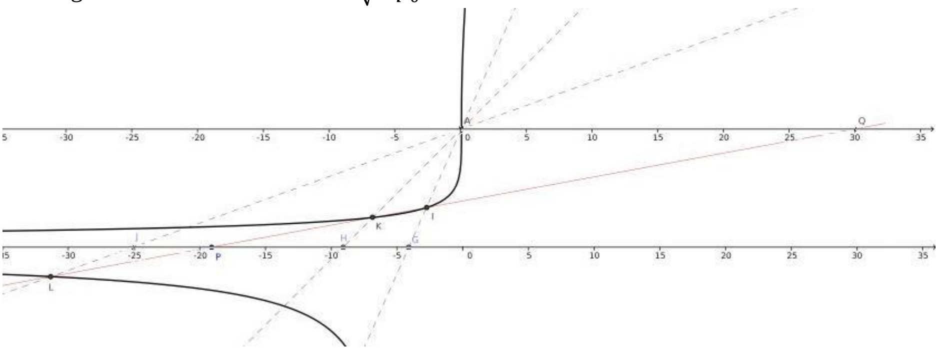


Abb. 14: Nomogramm mit nur einer Kurve zur Lösung kubischer Gleichungen

4 Resumé

Probleme, die mit der Erstellung und Nutzung von Skalen zu tun haben, sind vielfältig. Wir haben gezeigt, wie die Skalen unter anderem zum Festhalten einzelner Stadien eines Prozesses, dem Ausmessen einer Größe bezüglich verschiedener Einheiten, der Einschätzung und dem Ablesen von Änderungsraten, der Darstellung und dem Ablesen von Funktionen mehrerer Veränderlicher genutzt werden. Dies sind nur einige Kontexte, die eine neue Perspektive auf Funktionsgraphen eröffnen. Das Thema Skalen bietet auch eine neue Sichtweise auf andere kanonische Themen des Mathematikunterrichts. Das Ausmessen einer Größe mit einem gegebenen Maß und die Erstellung eines Maßes durch wiederholtes Teilen des Wertes einer Größe gestatten einen interessanten Zugang zum Umrechnen von Maßeinheiten und dem Problem der Kommensurabilität zweier Längen.

Der historisch-genetische Zugang zu funktionalen Zusammenhängen über Tabellen schafft einen Eindruck vom langen Weg der impliziten Nutzung der Gesetzmäßigkeiten von Funktionen, wie z.B. die Multiplikationsformel des Logarithmus, bis zu seiner expliziten symbolischen Formulierung. Modellierungsaufgaben erwecken oftmals den Eindruck, dass hier diskrete Methoden zum Einsatz kommen. Die Nutzung von Funktionsgraphen zeigt jedoch, dass die Welt der stetigen funktionalen Zusammenhänge nicht wirklich verlassen wird. Auch hier hilft die Perspektive der Skalen und Nomographie Methoden anzuwenden, die diskrete Strukturen zum Untersuchungsgegenstand werden lassen.

Literatur

Kultusministerkonferenz (2008). Kompetenzstufenmodell im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. KMK, Universität Kassel, Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen, www.iqb.hu-berlin.de.

Brown, J.S. & Collins, A. & Duguid, P. [1989]: Situated cognition and the culture of learning. Educational Researcher 18, 32-42.

Jablonka, Eva [2007]: Mathematical Literacy: Die Verflüchtigung eines ambitionierten Testkonstrukts. In Jahnke, Thomas & Meyerhöfer, Wolfram [Hrsg.] [2007]: PISA & Co – Kritik eines Programms. Franzbecker, Hildesheim.

Kaenders, Rainer [2014]: Funktionen kann man nicht sehen. In: R. Kaenders & R. Schmidt (Hrsg.) *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen.*, 2. Auflage, Wiesbaden: Springer Spektrum.

Kindt, M. [2002]: Razones y Razonamientos. Actas III Jornadas Provinciales de Matemáticas, Comunidad de Madrid, Consejera de educación, Dirección General de Ordenación Académica.

Lambert, Anselm [2013]: Zeitgemäße Stoffdidaktik am Beispiel "Füllgraph". In: Greefrath, Gilbert & Käpnick, Friedhelm & Stein, Martin [Hrsg.] Beiträge zum Mathematikunterricht, Band 1, Münster S. 596-599.

Lallemand, Charles [1885]: Les abaques hexagonaux: Nouvelle méthode générale de calcul graphique, avec de nombreux exemples d'application. Paris: Ministère des travaux publics, Comité du nivellement général de la France.

d'Ocagne, Maurice [1891] : Nomographie; les Calculs usuels effectués au moyen des abaques. Paris: Gauthier-Villars.

Prinz, Ina [2013]: Rechenschieber im Arithmeum: Die Sammlung. Schuitema. Nicolaische Verlagsbuchhandlung.

Schilling, Friedrich [1900]: Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner.

Weiss-Pidstrygach [2011]: Begriffsbildung mit tätigkeitstheoretischen Methoden. In: Haug, Reinhold & Holzäpfel, Lars (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht, WTM-Verlag, Münster, 891-894.

Anmerkungen

---

i Hier handelt es sich um die Rotationsfläche des Graphen der Funktion $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x} + x(x^2 - 3{,}2x + 2)$.

ii In (Kaenders, 2014) werden solche Diagramme als Nomogramme bezeichnet. Hier benutzen wir den Begriff *Nomogramm* allgemeiner im Sinne von d'Ocagne (1891).

iii Satz von Viviani: Die Summe der Abstände eines inneren Punktes eines gleichseitigen Dreiecks zu den Seiten ist konstant gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks.