Mehr Ausgewogenheit mathematischer Bewusstheit in Schule und Universität

Rainer Kaenders & Ladislav Kvasz & Ysette Weiss-Pidstrygach

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn & Karls-Universität Prag & Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Zusammenfassung Im Fach Mathematik klagen die Hochschulen im MINT Bereich über technische Defizite beim Übergang von der Schule zur Universität – mehr als dass die vorhandene mathematische Bildung der Studienanfänger in den Blick genommen würde. Anhand der Aspekte eines Vortrags von Otto Toeplitz betrachten wir den Übergang aus der Perspektive mathematischer Bewusstheit und entwickeln daraus einen Vorschlag, wie eine größere Ausgewogenheit mathematischer Bewusstheit in der Anfangsphase des Mathematikstudiums geschaffen werden kann.

1 Einleitung

“Aber das haben Sie doch schon in der Schule gehabt!”, so oder ähnlich hört sich mancher Universitätsdozent[1] in den MINT-Fächern ausrufen, wenn er wieder mal feststellt, dass die mathematische Vorbildung der Studierenden des ersten Semesters zu wünschen übrig lässt. Doch die jungen Studierenden haben dieses Studium nicht zuletzt deshalb gewählt, weil Mathematik ihnen in der Schule keine Mühe, ja vielleicht Freude und Erfolgserlebnisse bereitet hat. Dozenten schätzen an ihrer eigenen mathematischen Arbeit, dass sie dort eigene Beobachtungen machen, ihren eigenen Fragen nachgehen, dass sie neue Theorien aus Büchern und von Kollegen lernen und sich ihren mathematischen Problemen auf die unterschiedlichsten Weisen nähern. Sie können ihren eigenen Gedanken nachgehen. Mathematik kann nur, wer sich gerne mit ihr beschäftigt.

[1]Zugunsten einer besseren Lesbarkeit sind mit einer allgemeinen Rollenbezeichnung in der männlichen Form wie *Dozent* oder *Schüler* sowie mit dem Personalpronomen *er* immer gleichberechtigt beide Geschlechter gemeint.

Zugunsten einer *er* immer gleichberechtigt beide Geschlechter gemeint.

Häufig resultiert die Auseinandersetzung der Dozenten mit den Defiziten der Erstsemester in Listen von Fertigkeiten und Aufgabentypen, die *beherrscht* werden müssen. Es werden Eingangstests für die kommenden Erstsemester geplant und spezielle Tutorien sollen dafür sorgen, dass die Studierenden diese Rückstände aufholen. Und doch sind die Durchfallquoten bei den Klausuren zu den Anfängervorlesungen in den Grundvorlesungen zur Infinitesimalrechnung und Linearen Algebra desaströs, was leicht zu Klausuren führt, die sich auf das Abtesten vollkommen automatisierbarer Algorithmen beschränken. So sehen manche Studierende keine andere Möglichkeit als Dozenten und Tutoren zu imitieren und klammern sich – häufig durch reines Auswendiglernen – an den Formulierungen und vorgeführten Rechnungen fest. Formulierungen wie „Darf ich das so schreiben?" und „ich muss" bestimmen die Konversation. Nach etwa einem Jahr bleiben solche Studierende übrig, von denen die geforderten Systemleistungen erbracht wurden oder solche, die vorher aus eigener Kraft oder aus ihrer Vorgeschichte verstanden haben, dass die Techniken nur halb so schwer sind, wenn man die dahinterliegende Mathematik zum Leben erweckt. Viele Studierende – und darunter vielleicht auch das eine oder andere wirkliche Talent – verlassen frustriert die Universität, an der ein starkes ‚O Tempora – O Mores'-Gefühl bei den Dozenten bleibt, die dann mit der Gruppe der Übriggebliebenen endlich nach Höherem streben können. Anlass genug, dieses Phänomen im Detail zu betrachten.

1928 hat der Mathematiker Otto Toeplitz (1928) auf der *99. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Hamburg* einen bemerkenswerten Vortrag gehalten mit dem Titel „Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule." Wir lassen uns von diesem Vortrag bei der Betrachtung von Fragen zum Übergang Schule-Universität leiten. Wenn Toeplitz von Mathematikstudenten spricht, meint er künftige Lehrer – damals war Mathematiklehrer für etwa 95% der Studierenden der Mathematik das angestrebte Berufsbild. Doch seine Analyse der Situation ist allgemein der heutigen Situation an vielen Universitäten nicht unähnlich.

Aus mancher universitärer Einschätzung gewinnt man den Eindruck, das Problem der heutigen Universitätsdozenten sei vor allem, dass die Studierenden durch die Prüfung fallen. Betrachtet man nach einem Semester *Wissensvermittlung* das System, bestehend aus dem lehrenden Dozenten und der Gesamtheit der Studierenden, so sind vereinfachende quantitative Einschätzungen aufgrund von Klausuren naheliegend. Aus Entwicklungsperspektive ist die Bewertung eines Endzustands ohne Einbeziehung der Anfangsbedingungen unbefriedigend. Der Berufsausbildung entlehnte Trainingsmaßnahmen, wie Hörsaalübungen, zeigen das Bemühen der lehrenden Seite, Rückmeldungen der Studenten in die Auswahl der Inhalte mit einzubeziehen. Eine weitere, weit verbreitete Maßnahme, der Lehrenden, auch die Entwicklungen mathematischer Fertigkeiten in die Beurteilung mit einzubeziehen, besteht in begleitenden Evaluierungen durch die Bewertung der Übungsaufgaben und der gezeigten Beteiligung in den Übungen während des Semesters. Schon Toeplitz hat dieses *Problem* angesprochen und einen Übungsbetrieb empfohlen (und seinerzeit in Bonn auch durchgeführt), bei dem die persönliche Betreuung der Studierenden bei eigenständiger Arbeit eine zentrale Stelle in der Lehre und für die Prüfung eingenommen hat.

Im heutigen Übungsbetrieb ist das Bemühen, sich am individuellen Wissensstand der Studienanfänger zu orientieren und individuelle mathematische Bildung und Interessen der Studenten einzubeziehen, eher von Seiten der Studierenden durch begleitende Anleitung (bedingt geschulter) studentischer Übungsleiter zu beobachten. Peer Teaching, Gruppenarbeit und internetbasierte individuell gefundene Hilfestellungen finden dabei Anwendung. Letztere Herangehensweisen hängen stark vom Standort und von sich kurzfristig ergebenden Faktoren ab.

Im folgenden sollen Formen und Inhalte begleitender Anleitung stärker aus der Perspektive der Lehrenden, der Instruktion und Stoffauswahl betrachtet werden. Im Bereich der Lern- und Lehrtheorien führt dies zu Konzepten der Zone der nächsten Entwicklung und Scaffolding (Chaiklin, 2003) und (Kozulin, 2003).

Dabei interessieren uns Fragen, wie: Was ist die vorhandene mathematische Bildung der Studienanfänger, die man zum Ausgangspunkt nimmt und wo kommen in den Anfängervorlesungen des ersten Jahres mathematische Denk- und Arbeitsweisen zum Zuge, die Aufschluss über vorhandene mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Herangehensweisen geben? An welcher Stelle knüpfen die Universitätsdozenten bei der mathematischen Bildung ihrer Studierenden an?

Unser Ansatz, die Probleme des Übergangs von der Schule zur Hochschule zu beschreiben, besteht darin, die Perspektive mathematischer Bewusstheit einzunehmen. Dies gestattet uns, die Aufmerksamkeit von Merkmalslisten vorhandener mathematischer Grundkenntnisse und zu konstruierenden Wissens auf mathematische Herangehensweisen, Entwicklungsmöglichkeiten und ein breites, komplexes Verständnis mathematischer Entwicklung zu lenken. Im Unterschied zur resultatorientierten Perspektive des Wissensaufbaus und der Kalkülbeherrschung problematisiert der Begriff der mathematischen Bewusstheit einen Reifungsprozess. Die Unterscheidung verschiedener Qualitäten mathematischer Bewusstheit hilft die gleichzeitige, sich gegenseitig beeinflussende Entwicklung verschiedener mathematischer Konzeptualisierungen und Verinnerlichungen mathematischer Darstellungen zu erfassen, welche zusammen mit vorhandenen Fertigkeiten mathematische Herangehensweisen, Sichtweisen und Tätigkeiten ermöglichen.

Entwicklung mathematischer Bewusstheit misst sich weniger an der Herausbildung isolierter mathematischer Fertigkeiten als an der Breite möglicher mathematischer Fragestellungen und Entwicklungsmöglichkeiten. In Abschnitt 2 erläutern wir, wie wir mathematische Bewusstheit im Kontext des Übergangs von Schule zur Universität verstehen. In Abschnitt 3 betrachten wir speziell die Probleme der Lehre der

Infinitesimalrechnung anhand der von Toeplitz schon 1928 angesprochenen Problemfelder. Im letzten Abschnitt stellen wir dann unseren konstruktiven Lösungsansatz vor: Ausgewogenheit Mathematischer Bewusstheit als A & O.

2 Ausgewogenheit mathematischer Bewusstheit

Wenn wir Mathematik betreiben, werden uns viele Dinge bewusst, abhängig davon, wer wir sind, was wir zuvor erlebt und erkannt haben, in welchem kulturellen und sozialen Umfeld wir uns bewegen, wie wir veranlagt sind und was wir wollen. Es ist von außen nicht erkennbar, was uns bei mathematischer Tätigkeit bewusst wird und was vorher bewusst war.

Jede mathematische Tätigkeit hat ihre eigene Sprache – individuell unterschiedlich, selbst bei Lernenden in einer Lerngruppe. Doch die Sprache und Kommunikationskultur in einer Lerngruppe und in Lernmaterialien lassen begründet vermuten, dass die Entwicklung bestimmter Qualitäten mathematischer Bewusstheit von der Lehrperson oder von den Schulbuchautoren angestrebt und stimuliert wird. Doch dabei verbietet sich jede mechanistische Sichtweise.

In Kaenders und Kvasz (2010) werden in einer nicht notwendig vollständigen Liste bestimmte Qualitäten mathematischer Bewusstheit[2] angesprochen: *soziale*, *imitative*, *manipulative*, *instrumentelle*, *diagrammatische*, *experimentelle*, *strategische*, *kontextbezogene*, *intuitive*, *analogische*, *argumentative*, *logische* und *theoretische* mathematische Bewusstheit. Allesamt kommt diesen Qualitäten mathematischer Bewusstheit ein adverbialer Charakter bei der Beschreibung mathematischer Tätigkeiten zu, die in bestimmten Gebieten mit bestimmten Techniken durchgeführt werden. Dies wollen wir kurz an einem einfachen Beispiel aus der Bruchrechnung illustrieren. Für mehr Details verweisen wir auf den zitierten Beitrag.

Betrachten wir die Berechnung der Summe zweier Brüche, wie etwa: 9/16 + 3/5=? Hier könnte man sich mathematische Tätigkeiten vorstellen, in denen eine solche Berechnung beschrieben werden könnte als *Begründen durch Rechnen in Arithmetik*. Wir sind uns zum Beispiel der Lösung schon dann bewusst, wenn jemand uns die Lösung vorsagt; diese Bewusstheit ist eine *soziale* und dient sicher auch zur Begründung gegenüber dritten. Die Addition der speziellen Brüche vermittelt auch eine *exemplarische* Bewusstheit der Addition von Brüchen im Allgemeinen. Je nachdem, ob die Rechnung mit einem Taschenrechner durchgeführt wird oder einfach die vom Lehrer vorgeführten Schritte nachvollzogen und imitiert werden, kann man von *instrumentellem* oder *imitativem* Begründen durch Rechnen in Arithmetik

[2] Der Begriff *mathematisches Bewusstsein* wurde von den Autoren später in *mathematische Bewusstheit* geändert, um jede Nähe zu esoterischen Vorstellungen zu vermeiden.

sprechen. Die Qualität des Begründens wäre eher *manipulativ*, wenn die Rechnung der Merkregel ‚Gleichnamig machen und Zähler addieren' folgte. Auch *diagrammatisches* Begründen durch Rechnen in Arithmetik ist denkbar, wozu beispielsweise die folgenden Abbildungen einen Ausgangspunkt formen:

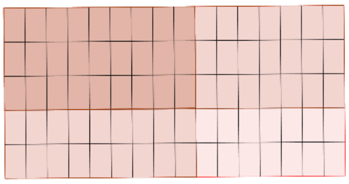

Abb. 1 Illustrationen zur Addition der Brüche 9/16 + 3/5 durch Hauptnennerbildung.

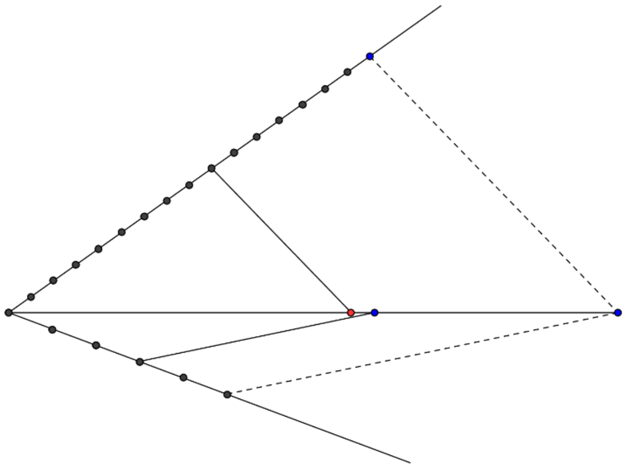

Abb. 2 Addition der Brüche 9/16 und 3/5 mit Hilfe von Ähnlichkeit.

Von *logischem* Begründen durch Rechnen in Arithmetik könnte man sprechen, wenn sie etwa auf einem Konzept rationaler Zahlen als Äquivalenzklassen von Paaren ganzer Zahlen und der Wohldefiniertheit der auf Repräsentanten definierten Addition beruht, d.h. wenn die Begründung innerhalb einer Theorie stattfände. *Theoretisch* würden wir die Qualität der mathematischen Bewusstheit nennen, wenn man über den Rahmen einer einzelnen Theorie hinaus nach der Gültigkeit einer solchen Berechnung fragen würde. Diese Frage außerhalb einer Theorie kann zum Ausgangspunkt neuer Theorien werden, wie etwa hier der Frage nach Quotientenkörpern von Integritätsgebieten oder ähnlichem.

Für das Betreiben von Mathematik, bei dem die individuelle Person eigene Fragen stellt, neue Dinge entdeckt und Mathematik auf eine Weise betreibt, die dem erfahrenen Mathematiker die selbstverständliche scheint, bedarf es einer Ausgewogenheit von Qualitäten mathematischer Bewusstheit. So stellt sich etwa die Frage danach, welcher der beiden Brüche die größere rationale Zahl darstellt auf natürliche Weise von selbst, wenn man die Berechnung instrumentell, manipulativ oder diagrammatisch durchführt. Bei der diagrammatischen Vorgehensweise durch die Verwendung von Bruchstreifen liegt auch die Frage, ob die Streifen in gleichbreite Stücke zerlegt werden können – und damit die Frage nach Kommensurabilität – eher auf der Hand als bei der manipulativen oder instrumentellen. Die manipulative Herangehensweise legt die Frage nach geeigneten Hauptnennern nahe und bringt damit Aspekte des euklidischen Algorithmus ins Spiel. Das instrumentelle Rechnen oder der manipulative Kalkül der schriftlichen Division auf der anderen Seite werfen die Frage nach endlichen und unendlichen Dezimalbrüchen auf. Durch die logische Herangehensweise der Wohldefiniertheit der Addition wird der grundlegende Begriff der Äquivalenzrelation erfahrbar und die Frage nach der Wohldefiniertheit anderer möglicher Operationen, wie ‚Zähler plus Zähler und Nenner plus Nenner' bietet sich auf natürliche Weise an.

Kurzum, eine Ausgewogenheit der Qualitäten mathematischer Bewusstheit lässt viele Gelegenheiten zu eigenen Fragen und Beobachtungen individuell beim Lernenden entstehen. Alle diese beschrieben Qualitäten mathematischer Bewusstheit haben ihren ausgesprochenen Sinn. So haben auch Spitzenmathematiker von manchen Inhalten zunächst eine soziale oder imitative Bewusstheit bevor sie dies zum Ausgangspunkt weiterer Beschäftigung und Entwicklung nehmen. Bei Themengebieten, die eine große Vielfalt von Qualitäten mathematischer Bewusstheit erlauben, ist es *immer* möglich, Antworten auf eigene Fragen zu finden – auch wenn die Antworten logisch und theoretisch noch lange nicht zufriedenstellend sein sollten. Solche Antworten auf schwere Fragen bieten jeweils eigenes Entwicklungspotential für tiefere Formen der Bewusstheit: Sie können reichen von ‚ich habe gehört, dass dies stimmt' über die Untersuchung der Frage an ganz speziellen Beispielen, über die Anfertigung von Repräsentationen und Visualisierungen oder die Formulierung heuristischer Argumente bis hin zu mit der Fragestellung verbundenen Konstruktionen in Computeralgebra, dynamischer Geometrie, Numerik oder Tabellenkalkulation.

3 Mathematische Bewusstheit der Infinitesimalrechnung

Nach zweitausend Jahren Mathematikunterricht anhand der Bücher Euklids wurde in Deutschland mit der Meraner Reform noch vor dem ersten Weltkrieg die Differenzialrechnung unter maßgeblicher Einflussnahme Felix Kleins in der Schule eingeführt. Für Toeplitz ergibt sich schon aus allgemeinen Bildungszielen, dass sich deren Unterricht in Schule und Hochschule notwendig unterscheiden muss:

> „Zu der Frage, ob es gut ist, daß die Schule sich der Infinitesimalrechnung bemächtigt hat, möchte ich generell gar nichts bemerken. Wie ich schon bei anderer Gelegenheit ausgeführt habe, liegt in diesem Vorgang ein *fait accompli*, ein irreversibler Prozeß vor, der im Augenblick keinesfalls rückgängig gemacht werden könnte, selbst wenn man es wollte. Der Umstand, daß uns Hochschullehrern gewisse Unbequemlichkeiten daraus erwachsen, kann für diese Frage gewiß nicht in Betracht kommen. Denn diese Unbequemlichkeiten rühren daher, daß die Infinitesimalrechnung für das Publikum der Schule naturgemäß auf eine ganz andere Art gelehrt werden muß, wie für das der Hochschule; wie es mit diesen Differenzen nun aber auch bestellt sein mag, es kann für den Standpunkt der Schule gar nicht in Betracht kommen, aus Rücksicht auf den kleinen Bruchteil ihrer Schüler, die später auf der Universität Mathematik hören, das Prinzip ihres Unterrichts irgendwie umzugestalten.“

Schauen wir uns nun die Situation der Infinitesimalrechnung in Schule und Universität aus der Perspektive mathematischer Bewusstheit an.

3.2 Infinitesimalrechnung im Gymnasium

Worin kann die Bildung durch Infinitesimalrechnung bestehen? Otto Toeplitz beobachtet 1928 im Unterricht der Infinitesimalrechnung in der Schule:

> „Ich muß auch hier mit einem sehr offenen Bekenntnis anfangen. Soweit ich mir einen Überblick über die sehr bunte, sehr schwer zu übersehende Praxis des jetzigen Augenblicks habe beschaffen können, überwiegt in der Infinitesimalrechnung der Schulen die formale Seite der Sache, die Rechentechnik des Differenzierens und Integrierens, um ein kurzes Wort zu gebrauchen: der Kalkül. Dieser Kalkül ist ein ungemein bequemer Unterrichtsgegenstand für die Schule, und kein Hochschullehrer wird eine Träne darum zerdrücken, weil ihm das Einexerzieren dieses Kalküls nun abgenommen ist. Die Frage ist nur, ob für die allgemeine Bildung, die die Schule erteilen will, in diesem Kalkül irgendein Wert gelegen ist, ein methodischer Wert, der das Niveau fördert. Und in diesem Punkte muß meine Antwort auf die Frage nach dem Nutzen der Infinitesimalrechnung auf der Schule sehr unzweideutig lauten: Wenn die Schule nicht imstande ist, aus der Infinitesimalrechnung mehr als den bloßen Kalkül herauszuholen, dann muß sie die Infinitesimalrechnung besser heute als morgen wieder beiseite stellen.“

Lassen wir Toeplitz ausführlicher zu Wort kommen.

> „Einzelne Lehrer haben den Wunsch zu zeigen, daß die Schule die Infinitesimalrechnung in derselben Strenge zu lehren vermag, wie die Universität sie

> lehren will. Auch hier muß ich mit uneingeschränkter Unzweideutigkeit erklären, daß dies eine Verkennung des Bildungszieles ist, das nicht künftige Mathematiker, sondern die Gesamtheit der Besucher einer höheren Schule fördern will. Der didaktische Wert einer Materie für die Schule ist weitgehend dadurch bestimmt, inwieweit sie sich in Serien von Aufgaben ansteigender Schwierigkeit aufspalten und umbrechen läßt. Das gilt von einer exakten Behandlung der Infinitesimalrechnung in besonders geringem Maße. Exhaustionsbeweise, ob man sie in der strengen Form der Griechen oder in modernem Gewände vorträgt, sind schwer als Aufgaben für Schüler zurechtzumachen;

Die von Toeplitz hier geäußerten Einwände beziehen sich auf die Schultauglichkeit der Inhalte der Infinitesimalrechnung als Teil der modernen mathematischen Sprache, basierend auf einer exakten Definition des Funktionsbegriffs, des Grenzwerts von Zahlen- und Funktionsfolgen und der reellen Zahlen. Diese über eine lange Zeit gereiften Begriffe wurzeln in verschiedenen Problemstellungen und deren Kontexten und haben erst nach vielfältigen und vielfachen komplexen mathematischen Tätigkeiten wie Kontextualisierungen, Abstraktion, Formalisierungen, Konkretisierung (siehe (Jahnke, 1999) und (Beutelspacher et al., 2011)) die elegante und universelle Form des Kalküls angenommen. Toeplitz spricht sich nicht gegen die Vermittlung abstrakter und formaler Inhalte in der Schule aus. Seine Befürchtungen gelten der Aneignung mathematischer Formalismen, deren Komplexität und technische Schwierigkeit eine kleinschrittige, problemorientierte, auf elementarmathematischen Fertigkeiten basierende Anleitung nicht gestattet und die daher durch Nachahmung und Training erlernt werden.

Aus der Perspektive der mathematischen Bewusstheit wird hier die Kluft angesprochen zwischen den durch Gewöhnung und Training erlernten Vokabeln des Kalküls und der damit verbundener sozialer, imitativer, manipulativer und instrumenteller Bewusstheit auf der einen Seite und der angestrebten konzeptuellen, logischen und theoretischen Bewusstheit andererseits, die erst ein Verständnis der in den mathematischen Begriffen erfassten Strukturen und Konzepte wie Linearisierung, Änderungsrate, Bogenlänge, Flächenmaß erlaubt.

Die Einheitlichkeit dieser sehr verschiedenen Qualitäten mathematischer Bewusstheit besteht darin, dass sie mit mathematischen Tätigkeiten verbunden sind, die stark auf Sicherung und Etablierung vorhandenen individuellen und kollektiven Wissens zielen. Die Darstellung mathematischen Wissens und zugehöriger Fertigkeiten, die diese Bewusstheiten entwickeln und unterstützen, sind durch die Anforderungen bequemer und effektiver Kommunikation und klarer Struktur geprägt und erlauben Objektbeschreibungen durch Merkmale und Regeln.

Experimentelle, strategische, kontextbezogene, intuitive, analogische und argumentative Qualitäten der Bewusstheit, werden eher durch Phänomene, kognitive

Konflikte und Problemstellungen aus Anwendungsbezügen gefördert. Die Entwicklung dieser Qualitäten hängt stark vom Individuum ab und wird u.a. durch Zweifel, Fragen, Freude am Spiel und Variation, Lust an technischer Perfektion und Wunsch nach Kommunikation begünstigt.

In der Sprache mathematischer Bewusstheit führt die auf die Beherrschung des Kalküls ausgerichtete Einführung der Infinitesimalrechnung zu Unausgewogenheit, welche durch einseitige Förderung „konservierender" mathematischer Herangehensweisen und Sprachentwicklung entsteht. Toeplitz hat dies am Beispiel der Infinitesimalrechnung so beschrieben:

> Im Rahmen der wirklichen Mathematik ist die Rolle der Infinitesimalrechnung doch etwas anders. Sie und insbesondere auch die Exhaustion in jedweder Form ist schließlich doch nur ein Handwerkszeug, das erst in den höheren Teilen der Mathematik seine Auswirkung findet. Welchen methodischen Wert hat dieses Handwerkszeug, wenn es Menschen dargeboten wird, deren größter Teil nie zu seinem Gebrauch im tieferen Sinne gelangt? Dann wird aus dem Handwerkszeug ein Spielzeug. Lassen Sie die Begeisterung vergehen, mit der heute diese Dinge, als etwas Neues, in der Schule probiert werden. Lassen Sie sie so abgetragen und schäbig aussehen, wie die Dreiecksaufgaben aussahen, nachdem man sie mehrere Jahrzehnte traktiert hatte. Dann wird der Drill dieser Dinge eine viel unerträglichere Last für das Gros der Schüler darstellen, als jetzt diejenigen Gegenstände, die zur Zeit verstaubt aussehen, aber didaktisch immerhin gesünder veranlagt waren.

Ein Suchen nach Alternativen zur hier beschriebenen Methode finden wir in vielen mathematikdidaktischen Publikationen und Projekten seit den 60er Jahren. Zum Beispiel im Rahmen des *Lüneburger Projekts zur praxisnahen Entwicklung von Materialien zum problemorientierten Analysisunterricht* (Stowasser, 1976, 1977, 1978, 1979) wurden im Toeplitzschen Sinn viele sehr schöne unterrichtstaugliche, sich an der historisch-genetischen Methode orientierende, Unterrichtsmaterialien und Lernumgebungen entwickelt. Die Verwendung Dynamischer Geometrie und Computeralgebra und wachsendes Interesse an Bezügen der Schulmathematik zu historischen Entwicklungen initiieren reichhaltige Unterrichtsmaterialien und vielfache Möglichkeiten zum experimentellen erkundenden Lernen (siehe z. B. (Hischer, 2000) und (Von Harten et al., 1986)).

Lösen Anwendungsbezug und Kontextualisierung die Probleme der Einführung und Vermittlung der Infinitesimalrechnung? Gibt die Motivation durch historische Fragestellungen ein tieferes Verständnis des Kalküls? Toeplitz beschäftigt sich auch mit diesen Fragen:

> Die Griechen selbst, die doch schließlich die Exhaustion und die Strenge erfunden haben, haben didaktisch über ihren Wert viel vorsichtiger gedacht. Plato spricht sich an einer Stelle der „Gesetze" sehr abgemessen darüber aus.

> Es handelt sich um den mathematischen Schulunterricht in der Oberstufe, oder wenigstens schickt Plato voraus, daß nur ein Teil der Gegenstände, die er hier anführt, in den gemeinsamen Unterbau aller öffentlichen Schulen gehören. Was er dann vorbringt, erweist sich in den Worten 820 c 4 unzweideutig als die Proportionenlehre, die wir aus dem 5. Buch des Euklid kennen, und die die Grundlage aller Exhaustionsbeweise – wir nennen es heute den Dedekindschen Schnitt, was da gelehrt wird – enthält. Dies muß man wissen, um die Worte voll zu würdigen, die er 819 a3−6 gebraucht und auf die es hier ankommt: von diesen ganzen Dingen nichts zu wissen, ist durchaus nicht das schlimmste, geschweige denn ein großes Manko, sondern viel gefährlicher ist die Vielerfahrenheit und Vielbelehrtheit in diesen Dingen unter schlechter Leitung“. Kann man pünktlicher das Verhältnis kennzeichnen, das gerade heute wieder aktuell geworden ist?

Für Toeplitz misst sich der didaktische Wert und die Eignung mathematischer Inhalte nicht an ihrem Wert innerhalb der mathematischen Theorie, sondern an der Vielfalt und Tiefe mathematischer Denk- und Herangehensweisen, welche durch die Beschäftigung mit diesem Inhalt möglich sind. Soziale, imitative, manipulative und instrumentelle Qualitäten mathematischer Bewusstheit werden durch Autorität, Status und Struktur des Mathematikunterrichts gefördert und erhalten weitere Stabilität durch Lernende, die an Instruktionen und an Merkmalslisten abfragenden Tests orientieren. Wir möchten hier nicht eine instruktionsarme Beschäftigung mit der Infinitesimalrechnung empfehlen, was nach unserer Meinung gar nicht möglich ist, sondern weisen auf eine zu berücksichtigende Eigendynamik der Aufmerksamkeit, der Einstellung und Kommunikationsgewohnheiten der Lernenden hin.

> Aber welcher Weg bleibt nun eigentlich der Infinitesimalrechnung auf der Schule, wenn es auf allen Seiten „zurück“ heißt? Ich will versuchen, diesen Weg in „kurzen“ Strichen anzudeuten. Neben dem Kalkül, neben der Exhaustion gibt es noch eine Art, die Infinitesimalrechnung anzufassen, die, in der die ersten Erfinder, von Kepler angefangen, an sie herangekommen sind, die des Technikers, der aus der Praxis unendlicher Prozesse, aus der Praxis der Konvergenz, nicht aus der Theorie der Konvergenz heraus, aus dem Umgehen mit kleinen Größen und ihrem Vernachlässigen eine numerische, eine graphische, unmittelbar lebensvolle Vorstellung hat, die ihn ohne den Rahmen einer strengen Theorie innerlich überzeugt. Und es ist vielleicht gar nicht das entscheidende, ob er den einzelnen unendlichen Prozeß aus einer inneren Überzeugtheit heraus anschaut oder ihn streng durchführt. Der entscheidende Unterschied ist, ob ein großes Gebäude von exhaustiven Hilfssätzen aufgeführt wird, oder ob stets nur am einzelnen Prozeß direkt ohne Handwerkszeug solcher Art gearbeitet wird. Dies ist die Ansicht der Infinitesimalrechnung, die der Techniker braucht. Könnte man sie auf der Schule vermitteln, so wäre dieser Unterricht kein formaler Kalkül, hätte einen Inhalt, der sich, und zwar auf keine andere Weise als aus Aufgaben der numerischen und graphischen

> Praxis heraus, entwickeln ließe, und der dem nicht geringen Bruchteil derjenigen Schüler, die später Techniker werden, auf der Oberrealschule dasjenige bieten würde, was sie später brauchen, und was den Lehrern der technischen Hochschule ihr Amt erleichtern und nicht erschweren würde.

Die Beherrschung des Differentialkalküls ist im Ansatz von Toeplitz nicht das Ziel der Beschäftigung mit den Ursprüngen der Infinitesimalrechnung. Ihm geht es um mathematische Bildung und die Förderung von Fertigkeiten, die jungen Menschen in einer Epoche großer ingenieurtechnischer Herausforderungen zahlreiche Entwicklungswege öffnen. In dieser von Toeplitz angesprochenen Art, die Infinitesimalrechnung anzufassen, sehen wir, dass verschiedene Qualitäten mathematischer Bewusstheit eine Rolle spielen. Die Sichtweise der „ersten Erfinder" und der „Techniker" bietet viele Möglichkeiten *manipulative*, *instrumentelle*, *diagrammatische*, *experimentelle*, *kontextbezogene*, *intuitive*, *argumentative* Qualitäten mathematischer Bewusstheit zu entwickeln bevor der *logische* Aufbau in den Blick genommen wird.

> Die ganze Schwierigkeit mit der Infinitesimalrechnung auf der Schule ist dadurch entstanden, daß man sie eingeführt hat, ehe man das didaktische Problem gelöst oder auch nur ernstlich angegriffen hatte, das hier eben aufgeworfen worden ist. Es darf nicht verheimlicht werden, daß es zur Zeit in der Hauptsache noch ungelöst ist. Davon, ob es gelingt, es zu lösen, davon, ob man es überhaupt mit voller Kraft vornimmt, wird es abhängen, ob die Infinitesimalrechnung auf der Schule die Stelle sich für immer erobert, die sie soeben zu besetzen begonnen hat. Gelingt die Lösung nicht, so wird die Infinitesimalrechnung in zwei Dezennien ebenso unrühmlich von der Schule verschwinden, wie heute die Dreiecksaufgaben verschwunden sind. Gelingt die Lösung, so werden alle beteiligten Instanzen befriedigt sein."

Doch wie steht es heute mit der Infinitesimalrechnung in der Schule? Wir sehen bei den Erstsemestern an der Universität, dass die Dominanz der manipulativen Qualitäten mathematischer Bewusstheit stark abgenommen hat. Das „Einexerzieren dieses Kalküls" wurde wieder an die Universitäten zurückgegeben.

Schauen wir uns Schulbücher und Unterricht von Mathematik an, dann sehen wir in der heutigen Schulpraxis auch, dass soziale, imitative, instrumentelle, diagrammatische, experimentelle, instrumentelle, kontextuelle Bewusstheit heute mehr Raum als noch in der Zeit vor 15 Jahren oder früher bekommen. Die Konzentration auf diese Formen von Bewusstheit hat eine mathematische Sprache entstehen lassen, die der Komplexität mancher klassischer mathematischer Phänomene gleichwohl nur noch in Teilen gerecht wird (Teilbarkeit, Irrationalität, Mittelwertsatz, elementare Aussagenlogik, Sprache der Mengenlehre, Potenzen reeller Zahlen, Trigonometrie …). Leider stehen auch die klassischen Kontexte aus der Physik und der Informatik nicht mehr zur Verfügung, da die Schule im heutigen Kurssystem nicht von entsprechenden Kurskombinationen ausgehen kann. Argumentative, logische und theoretische Bewusstheit liegen häufig außer Reichweite (auch für die begabten Schüler). Die Entwicklung experimenteller, kontextbezogener, intuitiver Qualitäten mathematischer Bewusstheit hängen in größerem Maße von individuellen Vorlieben und Erfahrungen und daraus resultierenden Herangehensweisen der Lernenden und von der erfahrenen aufmerksamen Begleitung und Anleitung der Lehrenden ab. Mit diesen Qualitäten verbundene mathematische Tätigkeiten operieren weniger mit verbalen oder diagrammatischen expliziten Bezeichnern, sie sind oft weniger reflektiert und schwieriger zu kommunizieren.

In den Mathematiklehrbüchern finden sich reichhaltige Probleme, die ein intuitives Verständnis konstruierbarer reeller Zahlen und solcher Zahlen, deren Existenz plausibel aus geometrischen und arithmetischen Zusammenhängen entsteht. Wechselwegnahme, verschiedene Beweise und Begründungen der Inkommensurabilität geometrischer Größen, Intervallschachtelung, rekursive Algorithmen bieten Raum für experimentelle mathematische Tätigkeiten.

Lenkung der Aufmerksamkeit, Formulierung der gemachten Erfahrung, Unterstützung beim Aufstellen und Prüfen von Vermutungen und konkrete Konstruktionen von Objekten bereiten am Ende auch den Boden für logische und theoretische Qualitäten mathematischer Bewusstheit. Und hier liegt die Herausforderung für die Lehrenden.

3.2 Infinitesimalrechnung an der Universität

Der universitären Lehre der Infinitesimalrechnung im Jahre 1928 attestiert Otto Toeplitz, dass sie der Vermittlung des Stoffes eine größere Priorität einräumt als der ‚Methode', d.h. der Einübung mathematischer Denk- und Arbeitsweisen. Auf letztere jedoch setzt er seine Hoffnungen und sieht hier die Lösung für die Herausforderung, die Kluft zwischen Schule und Universität zu überbrücken:

> „Eines kann nicht verschwiegen werden: Die Tendenz dieses Vertrages auf das Methodische ist die unbequemere; die Bequemlichkeit wird stets auf die stoffliche Seite hindrängen. Aber dieses Opfer an Bequemlichkeit – ich wage es zu hoffen – wird doch gar mancher bringen, wenn die Erkenntnis sich auf allen Seiten mehr durchgesetzt haben wird, daß mehr, als man heute sich bewußt ist, eine stetige Linie vom Unterricht der Schule bis zu dem der Hochschule führt, und daß es eine große Gemeinsamkeit beider Institutionen gibt, die fähig ist, alle Spannungen zu überwinden: das ist die Freude am Lehren."

Die universitäre Lehre charakterisiert er 1928 wie folgt:

> „Es sei jetzt nur von den Universitäten die Rede. Ihre Vorlesungen sind ausgesprochenermaßen auf das Stoffliche eingestellt. Sie lehren Tatsachen und betrachten Tatsachen stillschweigend als das einzig gültige Ziel. Die Tatsachen werden – das ist die Norm, und vereinzelte Abweichungen von der Norm

> haben in diesem ganzen Vortrag nur ein untergeordnetes Interesse – um ihrer selbst willen als absolute Werte hingesetzt, deren äußere oder innere Notwendigkeit zu motivieren überflüssig ist. Und diese selben Tatsachen bilden hernach, als „abfragbares Wissen“, die Grundlage der abschließenden Prüfungen.”

Und speziell die Vorlesungen zur Infinitesimalrechnung beschreibt er so:

> „Der tatsächliche Zustand dieser Vorlesung (Einführung in die Infinitesimalrechnung) an den deutschen Universitäten zeigt noch heute die gleiche bunte Mannigfaltigkeit; auf der einen Seite die strenge Observanz, die mit einer sechswöchentlichen Dedekindkur anhebt und dann aus den Eigenschaften des allgemeinen Zahl- und Funktionsbegriffs die konkreten Regeln des Differenzierens und Integrierens herleitet, als wären sie notwendige, natürliche Konsequenzen, auf der anderen Seite die anschauliche Richtung, die den Zauber der Differentiale walten lässt und auch in der letzten Stunde der zwei Semester umspannenden Vorlesung den Nebel, der aus den Indivisibilien aufsteigt, nicht durch den Sonnenschein eines klaren Grenzbegriffs zerreißt; und dazwischen die hundert Schattierungen von Diagonalen, die man zwischen zwei zueinander senkrechten Ideenrichtungen einzuschalten vermag.“

Heutige Vorlesungen der Infinitesimalrechnung sind hiervon mitunter nicht weit entfernt, auch wenn es immer wieder Versuche engagierter Dozenten gibt, die „Dedekindkur“ mit Anschauung und spannenden Kontexten zu kombinieren. Vielleicht noch weniger als früher verfügen die durchschnittlichen Erstsemester bei Studienbeginn über Erfahrung und Übung mit manipulativer und logischer mathematischer Bewusstheit.

Diese Vorlesungen tragen in allererster Linie zur wichtigen Entwicklung imitativer und logischer mathematischer Bewusstheit bei. Soziale mathematische Bewusstheit entwickelt sich – unbeabsichtigt vom Dozenten – durch einen umfangreichen Betrieb des Abschreibens von Lösungen zu Übungsaufgaben. Experimentelle, diagrammatische (Geometrie ohne Bilder) mathematische Bewusstheit werden weniger und manchmal nur auf eigene Initiative der Studierenden entwickelt. Argumentative Bewusstheit, die noch vor der logischen kommt, wird nur unter Insidern kommuniziert. Instrumentelle mathematische Bewusstheit kommt erst mit der angewandten Mathematik ins Spiel. Strategische mathematische Bewusstheit wird bei der Lösung der Übungsaufgaben von den Besseren weiterentwickelt, die dann den Fußgängern ihre Lösungsstrategien mitteilen. Kontextuelle mathematische Bewusstheit, etwa aus der Physik, finden wir nur noch selten. Logische mathematische Bewusstheit steht über allem. Auch theoretische mathematische Bewusstheit, die den Stoff wieder relativieren könnte, jedoch einige Erfahrung voraussetzt, ist den Fortgeschrittenen vorbehalten.

Studierende, die vor dem Studium an Maßnahmen der Begabtenförderung teilgenommen haben, sind häufig schon im Vorfeld zum Studium mit elementaren Hintergründen der Infinitesimalrechnung vertraut gemacht worden und verfügen damit schon bei Studienbeginn über eine größere Ausgewogenheit mathematischer Bewusstheit. Der durchschnittliche Studienanfänger jedoch hat selten aus eigenem Antrieb an mathematischen Objekten ‚rumgerechnet', ‚rumprobiert', und ‚rumbewiesen', Skizzen verfertigt, Programme geschrieben, Applets gemacht und all diese Dinge auf seine Weise für sich selbst lokal geordnet.

4 Ausgewogenheit mathematischer Bewusstheit als A & O

Dieses Buch soll konstruktive Vorschläge zur Verbesserung der Situation herausarbeiten. Uns geht es dabei um eine frühe Erfahrung selbstbestimmten Mathematiktreibens in Kontexten und mit Methoden, die eigene Beobachtungen und Entdeckungen möglich machen und eigene Fragen hervorrufen.

Ab dem dritten Studienjahr haben Universitätsdozenten große Freiheiten bei der Gestaltung der Inhalte und Methoden der Lehre. Hier werden die Studierenden an eigenes Mathematiktreiben herangeführt. Mancher Student erfährt erst im Rahmen seiner Abschlussarbeit oder gegebenenfalls erst während einer Promotion, wie selbstbestimmtes Mathematiktreiben aussehen kann.

> „Die Wirklichkeit der mathematischen Forschung ist ein Wechselspiel zwischen Stoff und Methode. Der eine Forscher besitzt Methoden und sucht sich die Stoffe, auf die er sie anwenden kann; der andere ist von Aufgaben gefesselt und schafft sich Methoden, um sie zu bewältigen. Anstatt daß man dieses Wechselspiel in seiner Buntheit sich vor den Studenten entwickeln läßt, systematisiert man es aus Gründen der Ökonomie und einer falsch gerichteten Didaktik zu einer möglichst gedrängten, oft meisterhaften Übersicht über die Tatsachen, während das, was der künftige Lehrer daran erfahren will, etwas ganz anderes ist. Der Ausgleich zwischen Stoff und Methode in den heutigen Universitätsvorlesungen ist im Prinzip nicht der richtige. In diesem Ausgleich sehe ich den Schlüssel zur Lösung des ganzen Aufgabenkomplexes, der von der Leitung des Kongresses mit dem Wort von der „Spannung" so vortrefflich gekennzeichnet worden ist." (Toeplitz, loc.cit.)

Es fragt sich, warum das Studium nicht vielmehr mit einem solchen Mathematiktreiben und entsprechender Ausgewogenheit mathematischer Bewusstheit beginnt. Für die Studierenden ist dies sicher nicht einfacher, doch vermittelt ihnen dies vielmehr, was das Wesen der Mathematik ist. Toeplitz spricht im Folgenden von ‚Niveau' und hält dies für die wichtigere und letztlich anspruchsvollere Forderung an die Studierenden, die diesen und den Dozenten vielmehr die Möglichkeit gibt, heraus zu finden, wer für ein solches Studium geeignet ist.

> „Eine Prüfung ist vor allen diesen Gefahren sehr viel gesicherter, wenn sie nicht auf das stoffliche, abfragbare Wissen abzielt, sondern auf die Ermittlung des Niveaus. Mit Niveau ist natürlich nicht gemeint, daß an Stelle des Stoffes festumgrenzte Fertigkeiten, eingedrillte Kunstgriffe im Lösen von Klausuraufgaben treten; das ist noch keine Methodik, nicht der Gegenpart des Stofflichen, der hier gemeint ist; man kennt seinen zweifelhaften Wert aus gewissen Prüfungstypen, die in England und Frankreich im Brauch sind. Mit Niveau eines Kandidaten ist seine Fähigkeit gemeint, das Getriebe einer mathematischen Theorie zu durchschauen, die Definitionen ihrer Grundbegriffe nicht zu memorieren, sondern in ihren Freiheitsgraden, in ihrer Austauschbarkeit zu beherrschen, die Tatsachen von ihnen klar abzuheben und untereinander und nach ihrem Wert zu staffeln, Analogien zwischen getrennten Gebieten wahrzunehmen oder, wenn sie ihm vorgelegt werden, sie durchzuführen, Gelerntes auf andere Fälle anzuwenden und anderes mehr. Eine Prüfung, die inhaltlich durchaus konkrete Dinge abhandelt, aber ihr Urteil nach Momenten solcher Art richtet, wird jenen gröbsten Fehlern, von denen oben die Rede war, nicht so leicht anheimfallen."

Für eine nachhaltige Veränderung schlagen wir vor, das erste Studienjahr umzugestalten und die heutigen Anfängervorlesungen im zweiten Jahr beginnen zu lassen. Im zweiten Studienjahr kann dann der Steilkurs durch die Infinitesimalrechnung und lineare Algebra beginnen, der sie auch stofflich auf das notwendige Niveau bringt um schließlich am Ende des Studiums Einsichten in moderne Entwicklungen der Mathematik gewinnen zu können.

Möchte man diese Umgestaltung vornehmen, dann fragt sich, was denn geeignete Inhalte hierfür sind. Es sollten Gebiete sein, in denen einfache Ideen eine große Tiefe ermöglichen. John H. Conway (2005) bemerkte hierzu in einer ‚Vorlesung über die Kraft einfacher Ideen in der Mathematik':

> „These simple ideas can be astonishingly powerful, and they are also astonishingly difficult to find. Many times it has taken a century or more for someone to have the simple idea; in fact it has often taken two thousand years, because often the Greeks could have had that idea, and they didn't.
>
> People often have the misconception that what someone like Einstein did is complicated. No, the truly earthshattering ideas are simple ones. But these ideas often have a subtlety of some sort, which stops people from thinking of them. The simple idea involves a question nobody had thought of asking."

Alle Mathematiker kennen Gebiete, die einerseits die Möglichkeit zu großer Ausgewogenheit mathematischer Bewusstheit bieten und andererseits Tiefe in einfachen Ideen erkennen lassen. Hier eine Liste, die sicher durch weitere Themengebiete ergänzt werden kann:

- Euklidische Geometrie der Ebene,
- Projektive und hyperbolische Geometrie,
- Klassische Kurven mit Elementargeometrie,
- Die klassischen Probleme,
- Elementare mathematische Kristallographie,
- Parkettierungen,
- Topologie von Knoten und Flächen,
- Polygone und Polyeder in Dimension 3 und 4,
- Graphentheorie und diskrete Mathematik,
- Operationsresearch,
- Elementare Zahlentheorie,
- Algebra von Gleichungen und Zahlen,
- Transformationsgruppen und Invarianten,
- Spieltheorie,
- Forensische Mathematik,
- Zelluläre Automaten,
- …

Stellvertretend für viele Bücher, die eine solche aktive Beschäftigung ermöglichen, sind beispielsweise (Lockwood, 1961), (Duzhin & Chebotarevsky, 2004) oder (Kaenders & Schmidt, 2014) zu nennen.

In all diesen Gebieten können Studierende in Projekten eigene sinnvolle Untersuchungen und Entdeckungen anstellen, eigene Argumentationsketten entwickeln und es kann das Verlangen entstehen nach mathematischer Entwicklung, die tiefer in die Mathematik hineinführt. Hier kann eine Tiefe entwickelt werden, die sich nicht nur auf imitative, manipulative und logische Bewusstheit konzentriert. In solchen Themengebiete ist es auch für Abiturienten, die zu Erstsemestern geworden sind, möglich, sich frei zu bewegen. Und ganz besonders die Geometrie klassischer Kurven zeichnet einen Weg in die Infinitesimalrechnung auf.

Kurzum, eine große Ausgewogenheit mathematischer Bewusstheit sollte am Anfang wie am Ende des Studiums stehen: A & Ω oder „A und O“.

Danksagung Wir danken dem Bonner *Hausdorff Research Institute for Mathematics. HIM* für die Möglichkeit über eine Tagung im Jahr 2013 einen Beitrag zu dieser Frage leisten zu können.

Literatur

Beutelspacher, A; Danckwerts, R.; Nickel, G.; Spies, S. & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Springer Vieweg.

Chaiklin, S. (2003). The Zone of Proximal Development in Vygotsky's analysis of learning and instruction.In Kozulin, A., Gindis, B., Ageyev, V. & Miller, S. (Eds.) *Vygotsky's educational theory and practice in cultural context*. 39-64. Cambridge: Cambridge University.

Conway, J.H. (2005) The Power of Mathematics. In Alan F. Blackwell & David MacKay (eds.), *Power*. Cambridge University Press.

Duzhin S.V. & Chebotarevsky B.D. (2004). Transformation Groups For Beginners. AMS, Student Mathematical Library, V. 25.

Von Harten, G., Jahnke, H-N., Mormann, Th., Otte M., Seeger, F., Steinbring H. & Stellmacher H. (1986). Funktionsbegriff und funktionales Denken. IDM Reihe, Bd. 11, Köln: Aulis-Verlag Deuber & CoKG.

Hischer, H. (2000). Klassische Probleme der Antike — Beispiele zur „Historischen Verankerung". In: Blankenagel, Jürgen & Spiegel, Wolfgang (Hrsg.): Mathematikdidaktik aus Begeisterung für die Mathematik — Festschrift für Harald Scheid. Stuttgart/Düsseldorf/Leipzig: Klett, S. 97 – 118.

Jahnke, H-N. (Hrsg.) (1999). Geschichte der Analysis. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Kaenders, R.H. & Kvasz, L. (2010). Mathematisches Bewusstsein. In: K. Lengnink & G. Nickel & R. Wille (Hrsg.) Mathematik verstehen – philosophische und didaktische Perspektiven, Siegen.

Kaenders, R.H., Kvasz, L., Weiss-Pidstrygach,Y. (2013). Mathematical Awareness by Linguistic Analysis of Variable Substitution, CERME 7, Rzeszów, Poland.

Kaenders, R.H. & Schmidt, R. (Hrsg.) (2014). Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. 2. Auflage, Wiesbaden: Springer Vieweg.

Kaenders, R.H. & Weiss-Pidstrygach,Y. (2010) Geometrisches Propädeutikum zur Begriffsbildung in der Analysis, Beiträge zum Mathematikunterricht, 2010.

Kozulin, A., Gindis, B., Ageyev, V., Miller, S. (2003). Vygotsky's educational theory and practice in-cultural context. Cambridge: Cambridge University Press.

Lockwood, E.H. (1961). A Book of Curves..Cambridge: Cambridge University Press.

Stowasser, R. J. K. (Hrsg.) (1976-1979). Materialien zum problemorientierten Unterricht. Der Mathematikunterricht MU, I-IV, 3/1976; 1/1977; 6/1978; 2/1979.

Toeplitz, O. (1928) Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule. *Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, (Vorträge, gehalten auf der 99. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Hamburg 1928), 11. Folge, Heft 10: 6.