Ysette WEISS, Mainz & Rainer KAENDERS, Bonn

Kulturen des Mathematiktreibens – vermittelt am Beispiel des Binomialkoeffizienten

Wie soll Kultur des Mathematiktreibens Eingang in den Unterricht finden? In der Pädagogik und Mathematikdidaktik gibt es – ausgehend von Allgemeinbildungskonzepten – "Maßstäbe", die für eine Beurteilung und Kritik des gegenwärtigen Mathematikunterrichts herangezogen werden (vgl. Heymann, 1996). Dieses Vorgehen ist normativ und geht davon aus, dass sich die Akteure auf ein grundlegendes Verständnis einigen können, welche Mathematik für die gegenwärtige Jugend als bildend und als allgemeinbildend anerkannt werden sollte. Schon die Debatten um Kompetenzorientierung, zentrale Tests und Digitalisierung bringen gleichwohl zu Tage, dass trotz der Lippenbekenntnisse für (neu)humanistische Bildungsideale der Aufklärung die Konsequenzen daraus enorm voneinander abweichen. Alle Akteure beziehen sich auf die Erziehung mündiger Bürger und haben deren Teilhabe am gesellschaftlichen Leben durch mathematische Praxis im Sinn. Doch, welche gemeinschaftliche mathematische Praxis ist hier gemeint?

Wir benötigen Perspektiven für gegenwärtige unterschiedliche Positionen zu Methoden und Inhalten des Mathematikunterrichts um sie danach zu ordnen, welche Rolle der Mathematik im zukünftigen Leben der Schülerinnen und Schüler zukommen soll (gemäß der Zukunftsbedeutung von Klafki, 1991, S. 270ff). Dazu müssen Vorstellungen, Haltungen und Überzeugungen und Zugänglichkeit zum Thema exemplarisch geklärt und Gemeinsamkeiten herausgestellt werden.

1. Kulturen des Mathematiktreibens in Anlehnung an Ernest

Was ist Mathematik Was ist Mathematik? Hierzu gib es nach Ernest (1991, S.127ff) zwei grundsätzlich verschiedene Haltungen. Die *Absolutisten* sehen Mathematik als unbestreitbares, objektives Wissen an, während *Fallibilisten* Mathematik als unsicher und veränderlich betrachten. Welche Bedeutung hat dann Wissen in der Mathematik? Hier unterscheidet Ernest nach Perry die drei Standpunkte *Dualism*, *Multiplicity* und *Relativism*. Ein *Dualist* teilt die Welt in Dichotomien ein und sieht Wissen als entweder richtig oder falsch an. Der *Multiplicity* Gesichtspunkt dahingegen ist von Pluralität gekennzeichnet. Dieser Standpunkt enthält keine theoretischen Richtlinien für Entscheidungen darüber, was Wahrheit ist, sondern lässt Aussagen neben einander stehen und kann sogar sich widersprechende Einsichten gleichzeitig akzeptieren. In der Position des *Relativism* hängt die Wahrheit des Wissens von seinem Kontext, einem Wertesystem und der eingenommenen Perspektive ab, wodurch dann aber auch die Richtlinien vorgegeben werden, an denen sich die Wahrheit zu messen hat.

In Bezug auf moralische Werte unterscheidet Ernest die *separated* Position, d.h. die Ansicht, dass menschliche Angelegenheiten das Urteil über Wahrheit nicht beeinflussen sollten, von der *connected* Sichtweise, welche menschliche Beziehungen, Empathie und Fürsorge mit einbezieht.

Diese Unterscheidungen bezieht Paul Ernest auf verschiedene soziale und auch auf verschiedene politische Gruppen und kommt dann zu der Unterscheidung: *Industrial trainer* (dualist/absolutist), *Technological pragmatist* (multiplistic/absolutist), *Old humanist* (relativist/absolutist – separated), *Progressive educator* (relativist/absolutist – connected), *Public educator* (relativist/fallibilist).

Anders als Ernest sehen wir diese Unterscheidung weniger als eine Unterscheidung zwischen politischen, bzw. sozialen Gruppen als zwischen unterschiedlichen mathematischen Kulturen des Mathematiktreibens. Dies folgt viel unmittelbarer aus den obigen Unterscheidungskriterien und erlaubt auch aktuelle Entwicklungen, wie die Digitalisierung der Kommunikation, mit einzubeziehen. Außenstehende können durch wenige Merkmale verschiedene Bildungsziele, Lehrpläne und Unterrichtsmethoden den jeweiligen Standpunkten zuordnen und reflektieren. Diese jeweiligen Kulturen mathematischer Praxis kennen Schwerpunkte, sind aber nicht notwendig auf bestimmte soziale oder politische Gruppen beschränkt.

2. Unterricht zum Binomialkoeffizienten

Anhand des Themas Binomialkoeffizient erläutern wir in jedem der folgenden fünf Paragraphen jeweils für eine der Gemeinschaften mathematischer Praxis, die Rolle und die Behandlung des Binomialkoeffizienten.

Für *Industrial trainer* (dualist/absolutist) steht die Mathematik fest und besteht in einer Liste von Regeln, die ihre Nützlichkeit schon lange bewiesen haben. Das nötige Vorwissen hängt nicht von der Person ab, sondern ist transparent und abgeprüft genau das, was in den Lehrplänen als Stoffinhalt verankert ist. Die Zugänglichkeit des jeweiligen Stoffes ist somit geklärt und Schüler vertrauen der persönlichen und mathematischen Autorität der Lehrperson. Will man $(a+b)^5$ ausrechnen, muss man die ersten fünf Zeilen des Pascalschen Dreiecks aufschreiben und findet dort die entsprechenden Koeffizienten für das Polynom in a und b. Die binomischen Formen können dabei vorausgesetzt werden. Die neuen Formeln können jetzt fleißig geübt werden, wobei man die Formeln richtig oder falsch anwenden kann. Auch ist der Binomialkoeffizient „n über k“ die Formel für die Anzahl der Auswahlen von k Dingen aus n.

Technological pragmatists (multiplistic/absolutist) sehen das Potenzial der Binomialkoeffizienten vielmehr zur – mitunter auch kreativen – Lösung von Problemen, wie sie sich in der Praxis des Berufslebens ergeben könnten. So kommt es häufig in – vor allem statistischen – Kontexten vor, dass endliche Sequenzen von Unterscheidungen in jeweils zwei Fälle A und B betrachtet werden. Die Anzahl der Entscheidungssequenzen mit einer festen Anzahl von A‘s oder einer festen Anzahl von B‘s, zählt man mit Hilfe von Binomialkoeffizienten. Anwendungen – wie beispielsweise ein Bernoulli-Experiment und die Binomialverteilung – sind in der Regel nur für eine große Anzahl von Entscheidungen gegeben. Daher werden die Binomialkoeffizienten gleich digital berechnet. Die Binomialkoeffizienten sind ein Beispiel von mathematisch feststehendem Standardwerkzeug, doch kommen ihre Anwendungen in einer unüberschaubaren Vielfalt von Kontexten vor, worin auch die Zugänglichkeit gefunden werden kann.

Abbildungen der Binomialkoeffizienten als Pascalsches Dreieck erschienen im 10. Jahrhundert in Indien (in Kommentaren zur Chandas Shastra). Es findet sich seitdem in verschiedenen Kulturen (beispielsweise das Yang-Hui-Dreieck in China, das Tartaglia-Dreieck in Italien und das Chayyām-Dreieck im Iran). Es bedurfte genialer Denker, wie Baise Pascal oder Isaac Newton, um ihre Bedeutung als Eckstein in der Kathedrale der Mathematik in großer Klarheit herauszustellen. Binomialkoeffizienten sind ein Beispiel für tiefe mathematische Strukturen, die einerseits kulturell geprägt und andererseits vielgestaltiger Ausdruck platonischer Ideen sind. Für *Old humanists* (relativist/absolutist – separated) ist dies der Anlass, sie näher zu untersuchen und bemerkenswerte Zusammenhänge über sie aufzudecken und zu beweisen. Die Summenformel, die zum Pascaldreieck führt, ist eine gute Übung um vollständige Induktion mit „Indexyoga“ zu üben – eine wichtige Technik für die Mathematik. Die Tatsache, dass die Binomialkoeffizienten, obwohl als Bruch definiert, natürliche Zahlen sind, ist bemerkenswert. Dies kann man mit der Frage nach der Anzahl der Nullen am Ende von 1000! zugänglich machen, was schnell zum Satz von Legendre führt, der angibt, wie oft ein Primfaktor in einer Fakultät vorkommt (vgl. Aigner & Ziegler, 2010, S.11) und die Ganzzahligkeit neu herausstellt. Wer in einem bildungsbürgerlichen Umfeld aufwächst, lässt sich gut durch solche historische, kulturelle und strukturelle Fragen motivieren.

Für *Progressive educators* (relativist/absolutist – connected) ist die persönliche Entdeckung von zentraler Bedeutung, über die man viel über sich selbst lernt. Enzensbergers Zahlenteufel beispielsweise spielt mit den Binomialkoeffizienten, lässt sie im Traum des Jungen Robert erscheinen. Dort gibt es allerhand an mathematischen Wahrheiten zu entdecken. Robert lernt die Mathematik ganz neu als eine menschliche Aktivität kennen. Nach zwölf Nächten aufregender Träume können die Schülerinnen und Schüler einen Traum für die dreizehnte Nacht selbst schreiben (Kaenders, 2006) und eine Form offener Kreativität in der Mathematik ausleben. Die Binomialkoeffizienten entstehen auch als Anzahl der kürzesten Wege in quadratischen Gittern. Jede Schülerin und jeder Schüler kann eine endliche Teilmenge der Gitterpunkte wählen und nun die kürzesten Wege bestimmen. So lernen Kinder die Mathematik als eine kreative menschliche Tätigkeit kennen und können sich dabei selbst erfahren und dabei auch bestimmte Basisfertigkeiten üben.

Public educators (relativist/fallibilist) sehen die Binomialkoeffizienten als Produkt sozial-historischer Gegebenheiten. Die frühe Neuzeit (Aufkommen des Kolonialismus, „Entdeckung“ Amerikas, Buchdruck, Renaissance, Humanismus, Reformation etc.) musste zwangsläufig zu einem Schub in Mathematik und Naturwissenschaften führen. Komplexer werdende Verwaltungsaufgaben einer sich modernisierenden Welt sorgten für die Notwendigkeit statistischer Erhebungen und so verwundert es nicht, dass entsprechende Fragen in den Focus der Wissenschaft gelangten, denn das Denken wird durch die Verhältnisse bestimmt. Heute trägt gerade die Statistik dazu bei, eine Volkswirtschaft über Renten, Steuern und Versicherungen solidarisch und gerecht zu gestalten. Bei alledem spielt auch der Binomialkoeffizient eine Rolle. Wer nicht der Autorität von vom System etablierten Experten folgen möchte, sollte besser mit ihnen umgehen lernen. Inzwischen sind solche elementaren Begrifflichkeiten für die Statistik jedoch nicht mehr unbedingt notwendig, wenn man auf digitale Werkzeuge baut, die von allen politischen Richtungen gleichermaßen akzeptiert werden. Die Beherrschung von mathematischen Instrumenten, seien es Binomialkoeffizienten oder SPSS, bedeutet Macht und kann soziale Verhältnisse verändern. Ihre Vermittlung ist ein Akt der Ermächtigung zur Teilhabe und Mitbestimmung in der Gesellschaft und zur Übernahme von Verantwortung für Schutzbedürftige.

Literatur

Aigner, M. & Ziegler, G. M. (2010). *Proofs from THE BOOK.* Springer-Verlag.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Routledge/Falmer, Taylor & Francis.

Heymann, H.W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim/Basel: Beltz.

Kaenders, R. (2006). Zahlbegriff zwischen dem Teufel und der tiefen See. *Der Mathematikunterricht*, Jahrgang 52, Heft 5.

Klafki W. (1991). Achte Studie – Zur Unterrichtsplanung im Sinne kritisch-konstruktiver Didaktik; In Klafki W. (1991). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik – Zeitgemäße Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik*. 2. erweiterte Auflage, Weinheim und Basel: Beltz, 251-284.