Rainer KAENDERS, Bonn & Ysette WEISS, Mainz

Über das Nähen mit Bindfäden Kurven entstehen lassen

Kurven nähen war im letzten Jahrhundert seit den 70er Jahren populär (vgl. Seymour & Snider, 1974; Pohl, 1986 oder Seymour, 1992). Vor allem das Buch „*Curve Stitching*" von Jon Millington (1991) zu großer Popularität. In Zeiten von dynamischer Geometrie können auf entdeckende Weise infinitesimale Phänomene mit elementarer Geometrie untersucht werden und es eröffnen sich propädeutische Zugänge zu Begriffen der Analysis, wie dem Begriff der Tangente und den historisch wichtigen inversen Tangentenproblemen. Wir berichten über einen Workshop mit Schülern.[1]

1. *Kurven nähen* als Propädeutik

Als Erfinderin des mathematischen *Curve stitching* wird häufig Mary Everest Boole (1832–1916) genannt (vgl. Fielker, 1973; Millington, 1991). In ihrem Buch (1904, S. 91ff) schreibt sie 60 Jahre nach ihrer Erfindung, dass sie hierin eine propädeutische Aktivität für die Geometrie erkannte:

"A concrete instance may help to make clear in what preparation for a subject consists. In my young days cards of different shapes were sold in pairs, in fancy shops, for making needle-books and pin-cushions. [...] When I was tired of so lacing that the threads crossed in the centre and covered the whole card, it occurred to me to vary the amusement by passing the thread from each hole to one not exactly opposite to it, thus leaving a space in the middle. […]

As the practical art of sewing perforated card was already quite familiar to me, my brain was free to receive as a seed the discovery I had made, and to let it grow naturally; all the more because no one spoke to me then of tangents, or tried to teach me any algebraic geometry, till some years had elapsed. Therefore, when I did begin to learn artificially about tangents, the teacher was not obliged to put cuttings into raw soil; he found ready a good strong wild stock of loving interest in the relation between a curve and the straight lines which generate it, on to which he was able to graft the new knowledge. …"

Und tatsächlich: die Fäden stellen nur Strecken dar. Die Kurve ist ein optischer Eindruck. „Ceci n'est pas une courbe." könnte man frei nach René Magritte sagen. Es sind nur Tangenten.

[1] Wir danken Marc Sauerwein und Stephan Berendonk für die Unterstützung bei der Durchführung und Planung des Workshops.

Abb. 1: Beispiele von Nähkurven aus Parabelsegmenten (Teile der Mainzer Ausstellung *Mathematik zum Begreifen*).

2. Eine Grundform aus Fäden

Eine Grundform, die in allen Behandlungen des Themas als erste und mitunter eher als Effekt präsentierte (z.B. Weigand & Ludwig, 2014, S. 56) vorkommt, ist folgende Konstruktion. In der euklidischen Ebene seien zwei in einem Punkt S inzidente Geraden g und h gegeben. Auf ihnen seien zwei äquidistante Punktreihen $S = P_0, P_1, \dots, P_n$ auf g, auf derselben Seite von h, und $S = Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ auf h, auf derselben Seite von g. Wir verbinden jeweils ein P_i mit einem Q_{n-i} für $i = 1, \dots, n$ (siehe Abb. 1 und 2).

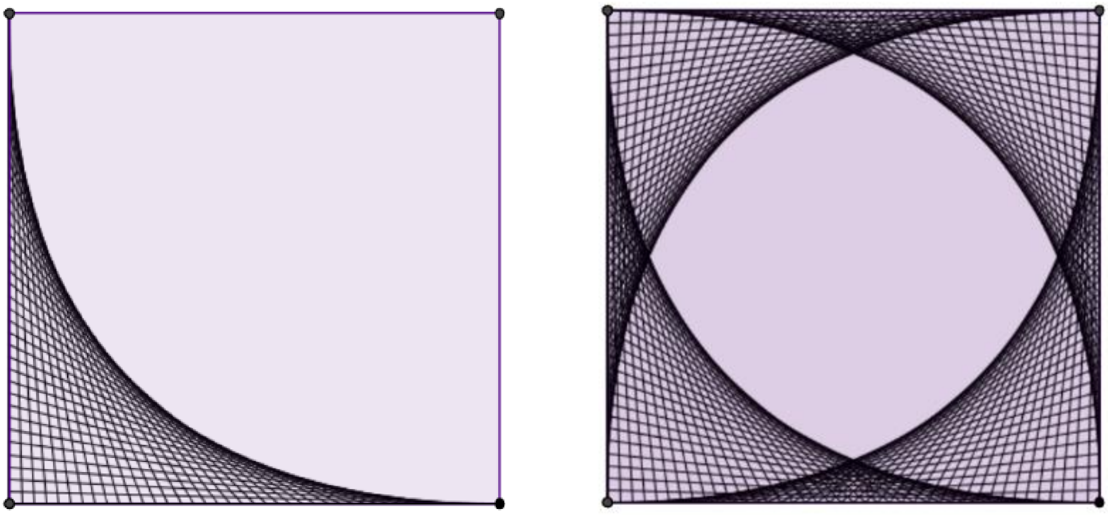

Abb. 2: Die Grundform aller Fadenkonstruktionen links und vierfach rechts

3. Bericht zu einem Workshop

In einem zweitägigen Workshop in Soest zum *Mathematik B-Tag* haben Schüler (nur Jungs) solche Fadenkonstruktionen untersucht. Es handelte sich um die vier besten Teams à fünf Schüler aus dem Landesranking (siehe www.machtmathe.de). Wir beschreiben den ersten Tag; am zweiten Tag wurden Konstruktionen der Kardioide studiert. Anhand einer Reihe von sich ergebenden Fragestellungen entwickelte sich entdeckendes Mathematiklernen. Dabei konnten wir folgende Phasen unterscheiden.

1. Sehnen im Kreis und in der Basiskonstruktion

In einer kurzen Einführung zeigten wir Bilder von Familien gleich langer Sehnen in einem festen Kreis, die einen Kreis einhüllen und Bilder, in denen die Basiskonstruktion auf vielfältige Weise kombiniert wurde.

2. Eingehüllten Kreis selbst erzeugen

Auf die Aufforderung nun einen Kreis selbst zu machen schlugen die Schüler (wie in Abb. 2, rechts) die Basiskonstruktion mit zwei aufeinander senkrechten geraden und gleichen Abständen in beiden Punktreihen vor, die dann in einem Quadrat in allen vier Ecken aufgezogen werden sollte. Nach einiger Zeit konnte diese Hypothese unter geeigneter Anwendung des Satzes von Pythagoras widerlegt werden. Die nächste Vermutung zur Erzeugung eines eingehüllten Kreises war dann die Basiskonstruktion mit orthogonalen Geraden und gleichen Abständen (wie in Abb. 2, links); hier wurde ein Viertelkreis vermutet. Dies wurde durch die Beobachtung gestützt, dass – wie man leicht nachrechnet – die Entfernung von der Ecke oben rechts bis zur Hüllkurve dem $\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1{,}06\ldots$ fachen der Kantenlänge des Quadrats, des vermuteten Radius, entspricht. Optisch in handgefertigten Zeichnungen sehen diese Strecken gleich lang aus.

3. Eine andere Hüllkurvenkonstruktion

Um welche Konstruktion handelt es sich bei der Basiskonstruktion denn nun, wenn es denn kein eingehüllter Viertelkreis sein kann? Von den Verfassern wurde den Schülern versichert, dass es sich um eine ihnen wohl bekannte Kurve handele. Daraufhin machte sich die allgemeine Vernutung breit, es müsse sich aufgrund der Form der Kurve um den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ handele. Eigentlich alle Schüler waren hiervon überzeugt, und manche argumentierten sogar, dass die Kurve asymptotisch den Achsen nähere, indem sie die Fadenfigur als über die Bewegung einer sich in der Länge verändernden Strecke auffassten. So sehr auf Mustererkennung fixiert, nahmen die Schüler die einfach nachzuweisende Tatsache nicht wahr, dass die Hüllkurve das Quadrat gar nicht verlassen kann, liegen doch alle Strecken innerhalb des Quadrats. Erst anhand der Frage, ob es sich um den Graphen einer Exponentialfunktion handele, wurde mit Eigenschaften der Funktionen argumentiert. Dann erst kam die Parabel ins Spiel, vor allem, weil keine aus der Schule bekannte Funktion mehr übrig war.

4. Über ein ähnliches Phänomen zur Lösung

Aber wie zeigt man, dass hier eine Parabel eingehüllt wird? Hier haben wir den Schülern eine klassische Konstruktion (Lockwood, 1961, S.) einer Hüllkurve vorgestellt, wie sie bspw. schon in Klasse 4 (Wittmann & Müller 2005, S. 89) behandelt wird. Es handelt sich um folgende Konstruktion der Parabel als Hüllkurve: Es sei ein fester Punkt F und eine Gerade g gegeben. Zu jedem Punkt P auf g betrachten wir nun die Gerade $g_P$durch den Punkt P, die senkrecht auf FP steht. Die Hüllkurve aller solchen Geraden g_P ist eine Parabel. Nachdem die klassische Definition einer Parabel eingeführt wurde und die Schüler nachgerechnet hatten, dass die Graphen quadratischer Funktionen Parabeln in diesem Sinne sind, wurden ihnen drei verschiedene – zwei algebraische, eine synthetisch geometrische – Herangehensweisen an den Beweis der Tatsache vorgeführt, dass es sich hier um eine Parabel handelt. Mit dieser Vorbereitung gelang es den Schülern, dann auch die entsprechenden Beweise bei der Basiskonstruktion zu führen.

5. Resümee

Es gelang mit diesem Workshop die Schüler eigene mathematische Untersuchungen anstellen zu lassen. Zudem wurden im GDM-Vortrag zwei unterschiedliche Beweise gegeben, dass die Grundkonstruktion eine Parabel einhüllt und es wurden allgemeine Betrachtungen zu Dualität angestellt.

Literatur

Boole, M. E. (1904) *The preparation of the child for science.* Oxford, At the Clarendon Press.

Fielker, D. S. (1973). Mathematics and Curve Stitching. *Mathematics Teaching*, 64, 18-22.

Hanson, A. (2013*). Cool String Art: Creative Activities That Make Math & Science Fun for Kids!* Checkerboard Library.

Lockwood, E.H. (1961). *A Book of Curves.* Cambridge: Cambridge University Press.

Ludwig, M. & Weigand H.G. (2014). Konstruieren. Kapitel III in: Weigand, H.G, Filler A., Hölzl, R., Kuntze S., Ludwig M., Roth J., Schmidt-Thieme B., Wittmann G. (2014). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Springer Spektrum, Berlin Heidelberg (2. Auflage).

Millington, J. (1991). *Curve Stitching: Art of Sewing Beautiful Mathematical Patterns*. Tarquin Publications.

Pohl, V. (1986). *How to Enrich Geometry Using String Designs*. National Council of Teachers of Mathematics.

Seymour, D.G. & Snider, J. (1974). *Line Designs.* Creative Publications, Palo Alto.

Seymour, D.G. (1992). *Introduction to Line Designs.* Dale Seymour Publications.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2005): *Das Zahlenbuch 4*. Leipzig: Klett.